Buku Teori Bilangan

By: Sri Supiyati

As of: Jun 25, 2024 12:48:32 PM

20,266 words - 212 matches - 96 sources

Similarity Index

19%

Mode: Similarity Report

paper text:

TEORI BILANGAN Dr. H. Edy Waluyo, M.Pd. Dr. Sri Supiyati, M.Pd.Si. Rody Satriawan, M.Pd. Neny Endriana, M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA UNIVERSITAS HAMZANWADI 95

PRESS Teori Bilangan Penulis : 1.

Dr. H. Edy Waluyo, M.Pd . 2. **Dr. Sri Supiyati, M.Pd.Si** 74

. 3. Rody Satriawan, M.Pd. 4. Neny Endriana, M.Pd. Editor : 1. Dr. Sri Supiyati, M.Pd.Si. 2. Rody Satriawan, M.Pd. 3. Ahmad Rasidi, M.Pd. Desain Cover : Rody Satriawan, M.Pd. Lay Out : Rody Satriawan, M.Pd. ii KATA PENGANTAR Modul Teori Bilangan ini merupakan modul yang dirancang untuk membantu mahasiswa dalam mengikuti program Rekognisi Pembelajaran Lampau yang diselenggarakan oleh KEMENRISTEK DIKTI Republik Indonesia dan dilaksanakan di dua Perguruan Tinggi yaitu Universitas Hamzanwadi sebagai PT Mitra dan Universitas Katolik Widya Mandira sebagai PTDT Mitra. Dalam modul ini, terdiri dari 12 kegiatan belajar. Setiap awal kegiatan belajar diawali oleh pendahuluan dimana pendahuluan berisikan bahan kajian, capaian pembelajaran, indikator pembelajaran,dan materi prasyarat. Bagian pendahuluan akan sangat membantu mahasiswa dalam mengetahui apa yang perlu dipersiapkan dan juga apa yang akan dicapai dalam setiap kegiatan belajar. Selain itu, materi yang telah disajikan pada setiap kegiatan belajar telah

disajikan dalam bahasa yang sederhana sehingga mudah untuk dipahami. Pada 92

setiap akhir kegiatan belajar juga terdapat latihan sebagai wadah bagi mahasiswa untuk lebih mengasah dan menguji pemahaman yang telah diperolehnya. Akhir kata, semoga modul yang telah disusun ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa peserta program Rekognisi Pembelajaran Lampau pada khususnya, dan kita semua pada umumnya. Selong, 12 Oktober

 iv SINOPSIS Teori bilangan merupakan cabang matematika yang berkaitan dengan sifat bilangan bulat positif. Kadang-kadang disebut juga sebagai aritmatika yang lebih tinggi. Teori bilagan merupakan salah satu pengajaran matematika tertua dan paling alami. Hingga sekarang ini, teori bilangan dianggap sebagai cabang matematika paling murni, tanpa penerapan langsung ke dunia nyata.Munculnya komputer digital dan komunikasi digital mengungkapkan bahwa teori bilangan dapat memberikan jawaban tak terduga untuk masalah dunia nyata. Pada saat yang sama, peningkatan teknologi komputer memungkinkan para ahli teori bilangan membuat kemajuan luar biasa dalam memfaktorkan bilangan besar, menentukan bilangan prima, menguji dugaan, dan memecahkan masalah numerik yang pernah dianggap tidak terjangkau.

Mata kuliah teori bilangan dirancang untuk mahasiswa agar setelah mengikuti mata kuliah ini; mahasiswa menguasaikonsep teori bilangan, yang ditunjukkan dengan kemampuan bekerja secara individu maupun tim dalam menerapkan konsep konsep Induksi matematika, teorema **bilangan** , relasi keterbagian, FPB **dan** KPK, basis **bilangan bulat** , bilangan prima, **faktorisasi** tunggal, definisi **dan** 38

sidat kekongruenan, perkongruenan linear, teorema wilson, fungsi tu, teorema sigma, fungsi mobius, dan fungsi bilangan bulat diperbesar dalam menyelesaikan masalah matematika dengan baik. v A. KEGIATAN BELAJAR 1 A.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 1 Bahan kajian : induksi matematik dan teorema bilangan Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang induksi matematik dan teorema binomial. Indikator pembelajaran : ‣ mahasiswa mampu membuktikan pernyataan matematika dengan induksi matematik. ‣ mahasiswa mampu mengimplemnetasikan konsep dan prinsip induksi matematik untuk menyelesaikan masalah. ‣ mahasiswa mampu mengimplemnetasikan konsep dan prinsip teorema binomial untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, dan notasi sigma. A.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 1 A. Induksi Matematik Induksi

matematik merupakan salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam Teori Bilangan maupun dalam matematika lainnya. Sedangkan Teorema Binomial, selain sebagai dasar, banyak digunakan dalam penuruan **beberapa teorema dan pemecahan masalah dalam matematika** 42

. Oleh karena itu, pengusaan kemampuan-kemampuan tersebut sangat penting bagi mereka yang akan mempelajari matematika, karena banyak bahasan dalam matematika yang menggunakan prinsip-prinsip tersebut untuk meurunkan teorema atau untuk pemecahan masala. Hampir setiap bahasan berikutnya nanti menggunakan dua prinsip tersebut, baik untuk membuktikan teorema maupun untuk memecahkan soal-soal yang ada. Induksi matematik meruakan slah

satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau ernyataan **matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli** 64

. Perhatikan contoh penrnyataan-pernyataan matematik berikut. Contoh 1.1: ( ) untuk setiap bilangan asli . Benarkah pernyataan ini? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat mencoba dengan mensubstitusikan n dalam pernyataan itu sembarang bilangan asli. Jika , maka pernyataan itu menjadi ( ), atau yaitu diperoleh suatu pernyataan yang benar. Jika maka pernyataan itu menjadi ( ), atau , yaitu diperoleh suatu pernyataan yang benar. Jika maka pernyataan itu menjadi ( ), atau , yaitu suatu pernyataan benar pula. Pembaca dapat melanjutkannya untuk ; ;

atau bilangan asli lainnya dan akan selalu memperoleh pernyataan yang bernilai benar. Apakah dengan **memberikan beberapa contoh dengan** 65

mensubstitusi beberapa bilangan asli pada n dari pernyataan semula dan diperoleh pernyataan-pernyataan yang benar, sudah memberikan bukti tentang kebenaran pernyataan tersebut.

Dalam matematika, pemberian beberapa contoh seperti itu **bukan merupakan bukti dari kebenaran suatu pernyataan yang berlaku dalam** 48

himpuanan semestanya. Pernyataan

pada contoh di atas, himpunan semestanya ialah **himpunan semua bilangan asli** 48

. Jika kita dapat memberikan contoh untuk tiap bilangan asli pada pernyataan yang benar, maka hal tersebut dapat merupakan bukti kebenaran dari pernyataan itu, tetapi hal ini tidak efisien dan tidak mungkin kita lakukan, karena banyaknya anggota himpunan bilangan asli ada tak berhingga. Lalu bagiamana cara membuktikan pernyataan tersebut? Salah satu caranya ialah memandang ruas pertama dari pernyataan itu sebagai deret aritmatika dengan suku pertama ; bedanya , suku terakhirnya ialah dan memiliki buah suku, maka jumlah deret itu adalah ( ) ( ) ( ), yaitu ruas kedua dari pernyataan yang dibuktikan.

Cara lain untuk membuktikan pernyataan itu adalah dengan induksi matematik. Langkah- langkah pembuktian dengan induksi matematik adalah sebagai berikut. Misalkan ( ) adalah suatu proposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli . Langkah-langkah pembuktiaannya **dengan induksi matematik sebagai berikut** : Langkah (1) : **Ditunjukkan bahwa ( ) benar** Langkah (2) : **Diasumsikan bahwa ( ) benar untuk suatu bilangan asli dan ditunjukkan bahwa ( ) benar. Jika langkah-langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan kebenarannya, maka selanjutnya disimpulkan bahwa ( ) benar untuk setiap bilangan asli** . Mengapa demikian? Karena **langkah (1** 25

) yaitu ( ) benar, dan karena langkah (2), maka ( ) benar pula. Selanjutnya, karena ( ) benar, menurut langkah (2), maka ( ) benar pula. Dan menurut langkah (2) lagi, ( ) benar pula, dan seterusnya sehingga ( )

benar untuk setiap bilangan asli . Langkah (1) di atas **sering disebut** basis (**dasar) induksi, dan langkah (2) disebut langkah induksi** 25

. Kita sekarang akan menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematik itu untuk mmbuktikan pernyataan pada contoh 1.1 di atas. Contoh 1.2: Buktikan bahwa ( ) untuk setiap bilangan asli . Bukti : Misalkan ( ) menyatakan ( ) (1) ( ) adalah ( ) yaitu jelas benar. (2) Diasumsikan bahwa ( ) benar untuk suatu bilangan asli , yaitu ( )

benar Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa ( ) benar, yaitu : ( ) ( )( ) Hal ini ditunjukkan sebagai berikut : ( ) (( ) ( ) ( ))(karena **diasumsikan) ( ) ( ) ( )( ) Jadi, ( ) ( )( ) berarti ( ) benar. Contoh** 7

1.3: Hitunglah ( ) !! Jawab : ( ) sebagai deret aritmatika dengan suku pertama , beda dan banyaknya suku adalah serta suku terakhirnya ( ). Maka jumlahan tersebut dapat dihitung denga rumus jumlahan deret aritmatika yaitu ( ) ( ) Jadi, ( ) Tetapi jika kita lupa atau belum mngerti rumus deret aritmatika tersebut, maka hal tersebut tidak dapat kita lakukan. Kita dapat membuat dugaan dengan mencoba jumlah beberapa suku berikut:

Dan seterusnya Tampak bahwa jumlahan-jumlahan ini merupakan bilangan kuadrat sempurna 88

, sehingga kita bisa menduga bahwa: ( ) Tetapi dugaan ini baru merupakan jawabn sementara, sehingga harus dibuktikan kebenarannya. Pembuktiannya dapat dilakukan dengan induksi matematik sebagai berikut: Misalkan ( ) menyatakan ( ) (1) ( ) adalah , jelas benar. (2) Dimisalkan ( )

benar untuk suatu bilangan asli yaitu ( ) dan ditunjukkan bahwa ( ) benar, yaitu ( ) ( ) ( ) . Hal ini **ditunjukkan** 46

sebagai berikut: ( ) ( ) ( ) Sehingga ( ) benar. Jadi, ( ) benar untuk setiap bilangan asli . Contoh 1.4: Buktikan bahwa ( ) untuk setiap bilangan asli . Bukti : Misalkan ( ) menyatakan ( ) (1) ( ) adalah ( ) yaitu (benar). (2) Diasumsikan bahwa ( ) benar untuk suatu bilangan asli , yaitu ( ) .

Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa ( ) benar, yaitu : ( ) [( )] ( ) ( ) Hal ini ditunjukkan sebagai berikut : ( ) [( )] ( ) ( ) ( ) [( )]karena 7

diasumsikan ( ) ( ) ( ) Jadi, ( ) berarti ( ) benar. Contoh 1.5: **Buktikan bahwa**

untuk setiap bilangan asli . Bukti : Misalkan ( ) menyatakan . (1) ( ) adalah yaitu (benar). (2) Diasumsikan bahwa ( ) benar untuk suatu bilangan asli , yaitu .

Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa ( ) benar, yaitu : ( ) ( ) ( ) Hal ini ditunjukkan sebagai berikut : ( ) (( ) ( ) ( )) (Karena **diasumsikan)** 7
benar. Contoh 1.6: Buktikanlah **bahwa**

untuk setiap bilangan asli berlaku: Jadi, ( ) (( ))(( )) berarti ( ) Bukti: Misalkan ( ) adalah ( )( ) (1) ( ) adalah yaitu (benar) Jadi, ( ) benar. (2) Diasumsikan bahwa ( )

benar untuk suatu bilangan asli yaitu ( )( ). Dan harus ditunjukkan bahwa ( ) benar, yaitu ditunjukkan bahwa 46

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: (( ) ( )(( )[(( ) [(( )(( )( )( )( )])( )( ).) ( ))])) Jadi, ( ) benar. Selanjutnya

dari langkah-langkah (1) dan (2) disimpulkan bahwa ( ) benar untuk setiap bilangan asli 20

. B. Teorema Binomial Kita akan mengingat kembali pengertian kombinasi sejumlah proyek yang diambil dari obyek. Banyaknya kombinasi dari obyek yang diambil dari obyek ( ) adalah: ( ) ( ) ( ) Contoh 1.7: 1.

Misalkan ada 5 obyek yaitu a, b, c, d, dan e . Jika **dari 5 obyek ini diambil** 3 **obyek, maka banyaknya cara pengambilan 3 obyek** 6
tersebut adalah

2.

Misalkan dalam sutau **kotak terdapat 3 kelereng merah dan 4 kelereng putih** . Jika **kita mengambil 3 kelereng merah** dari 6
dalam kotak tersebut, maka banyaknya cara pengambilan ada

( ) Tetapi jika

kita mengambil 3 kelereng dari **dalam kotak** itu, **maka banyaknya cara pengambilan ada** 6

( ) Jika

kita mengambil 4 **kelereng** dari **dalam kotak tersebut, maka banyaknya cara pengambilan ada ( ) 3** 18

.

Misalkan ada tiga **kotak yang** terambil **masing-masing berisi** satu **bola merah dan** satu **bola putih. Dari tiap-tiap kotak** 6
diambil satu **bola, sehingga terambil** tiga **bola. Banyaknya cara pengambilan** 3 **bola tersebut, agar terambil bola merah semua**
ada ( ) . Banyaknya cara pengambilan 3 **bola tersebut, agar terambil** dua bola **merah ada**

( ) .

Banyaknya cara pengambilan 3 **bola** itu, **agar terambil** satu **bola merah ada ( ) . Banyaknya cara pengambilan** 3 **bola** itu, 6
agar tak terambi **bola merah ada**

( ) . Contoh terakhir ini akan digunakan untuk menyatakan suku banyak yang merupakan penjabaran dari ( ) . Perpangkatan ini dapat dinyatakan sebagai perkalian berulang dengan 3 faktor sama yaitu: 3 ( )( )( ) Tiap suku dari ruas kanan kesamaan ini terdiri dari 3 faktordan masing-masing berturut-turut diambil dari faktor pertama, faktor kedua dan faktor ketiga dari ruas pertama. Memperhatikan contoh 1.7 nomor 3 di atas, maka Banyaknya suku dengan tiga adalah ( ) ,

Banyaknya suku dengan dua **m ada ( ) , Banyaknya suku dengan** satu **m ada** ( ) , dan **Banyaknya suku tanpa m ada** 6

( ) , Pada kesamaan terakhir itu, jika suku-suku sejenisnya dijumlahkan, maka akan diperoleh: ( ) Koefisien-koefisien suku-suku dari ruas kanan dari kesamaan terakhir ini dapat dinyatakan dengan kombinasi-kombinasi banyaknya m dalam tiap sukunya, sehingga kesamaan itu dapat ditulis sebagai berikut. ( ) () () () () Dengan argumentasi yang mirip dengan ilustrasi di atas, kita dapat menuliskan kesamaan- kesamaan berikut ini. Coba periksalah kebenaran ! ( ) () () ( ) () () () ( ) () () () () ( ) () () () () () ( ) () () () () () Kesamaan terakhir ini baru merupakan dugaan, karena kesamaan terakhir diperoleh dengan penalaran induktif. Oleh karena itu, kesamaan itu perlu dibuktikan kebenarannya. Kita perlu beberapa persiapan berikut ini: Dari rumus kombinasi di atas, yaitu: ( ) () ( ) Kita dapat memahami bahwa: ( ) ( ) Jadi, () ( ) Teorema 1.1: Jika , maka ( ) ( ) Teorema ini sering disebut sifat simetrik dari koefisien binomial. Sifat ini membantu kita untuk menghitung lebih mudah nilai suatu kombinasi. Contoh 1.8: 1) ( ) ( ) 2) ( ) ( ) Perhatikan contoh berikut ini: Contoh 1.9: Misalkan dalam suatu perkumpulan terdiri dari 10 orang dan akan dipilih 3 orang sebagai utusan yang mewakilinya, maka banyaknya pilihan 3 orang dari 10 orang tersebut ada ( ) pilihan. Sekarang, jika pemilihan 3 orang tersebut tidak menyertakan seorang tertentu dari 10 orang tersebut, berarti 3 orang itu dipilih dari 9 orang, maka banyaknya pilihan 3 orang dari 9 orang itu ada ( ) pilihan. Selanjutnya, jika seorang tertentu yang tidak diikutkan dalam pemilihan tadi harus ikut pada setiap pemilihan, berarti untuk memilih 3 orang tu, kita tinggal memilih 2 orang dari 9 orang, maka banyaknya pilihan 3 orang tersebut ada ( ) pilihan. Dari argumentasi ini, kita memperoleh hubungan bahwa ( ) () () Periksalah bahwa kesamaan tersebut benar! Secara umum hubungan itu dinyatakan sebagai teorema berikut ini. Teorema 1.2. Jika dan bilangan-bilangan asli dengan , maka ( ) () ( ) Bukti: ( ) () ( )( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) (( )) (( )) ( ) () ( ) Sekarang kita siap untuk membuktikan kebenaran penjabaran suku dua berpangkat di atas dengan mengambil dan , yang selanjutnya disebut teorema binomial. Teorema 1.3 (

Teorema Binomial): ( ) () () () () () () Untuk setiap bilangan asli- . Bukti: Kita buktikan dengan induksi matematik : (1) **Untuk , maka** (20
) ( ) ( ) , benar. (2) **Diasumsikan bahwa pernyataan benar untuk , yaitu: ( ) () () () () ( ) Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk ( ) ( )( ) . ***
() () () () +( ) ( ) *( ) ( )+ *( ) ( )+ ( ) ( ) ( ) *( ) ( )+ ( ) (() ()) Dari langkah-langkah (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa teorema terbukti benar untuk setiap bilangan asli

. Koefisien-koefisien pada ruas kanan pada teorema 1.3 di atas disebut koefisien binomial. Contoh : 1) Koefisien dari penjabaran (2) Koefisien dari penjabaran ( ) . adalah ( )) adalah ( ) . Jika pada teorema binomial tersebut , maka diperoleh kesamaan: ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) () () () () () () Kesamaan terakhir ini dinyatakan sebagai teoema berikut ini. Teorema 1.4: Jika suatu bilangan asli, maka: () () () () () () Selanjutnya perhatikan penurunan rumus berikut ini: ( )( ) (( )) (( ) ( )) ( ) ( )( ) Rumus yang diperoleh ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini. Teorema 1.5: Jika , , dan bilangan-bilangan asli dengan , maka ( )( ) ( )( ) Untuk memperjelas makna dari teorema ini, perhatikan contoh berikut! Contoh: Suatu perkumpulan terdiri dari 15 orang. Akan dibentuk suatu pengurus dari perkumpulan tersebut yang terdiri 5 orang dan 2 orang diantaranya sebagai inti. Maka banyaknya pilihan pengurus itu adalah ( )( ) Pemilihan tersebut dapat pula dilakukan dengan memilih 2 orang pengurus inti dari 15 orang dan selanjutnya untuk melengkapi pengurus inti dari 15 orang dan selanjutnya untuk melengkapi pengurus itu dipilih 3 orang dari 13 orang (yang 2 orang telah telah terpilih sebagai pengurus inti). Maka banyaknya pilihan pengurus ini adalah ( ) ( ) Tampak di sini bahwa ( ) ( ) ( ) ( ) Pada teorema 1.5 tersebut, jika , maka diperoleh : ( ) ( ) Hubungan ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini. Teorema 1.6: Jika dan bilangan-bilangan asli dengan , maka ( ) ( ) Koefesien-

koefisien binomial pada teorema binomial **di atas dapat kita susun secara rekursif** 6

, seprti tampak pada gambar 1. dan sering disebut juga dengan segitiga Pascal sebagai berikut: 1 1 1 6 1 2 1 2 1 3 1 3 3 1 4 1 4 6 4 1 5 1 5 10 10 5 1

Gambar 1 Bilangan-bilangan segtiga **Pascal tersebut** dapa **dibangun tanpa proses rekursif dengan notasi kombinatorik** 6

seperti tampak pada gambar 2. () () () () () () () () () () () () () () () () () ( ) Gambar 3 Perhatikan anak panah 5 pada gambar 1 dan gambar 2 Anak panah 6 itu menunjukkan bahwa ( ) ( ) Fakta ini secara umum dapat dituliskan sebagai berikut: () ( ) ( ) ( ) (() () () () atau ( ) ( ) ( )) ( ) Anak panah 6 pada gambar 1 dan gambar 2 berturut-turut menunjukkan bahwa 0 atau ( ) ( ) ( ) ( ) Fakta ini secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut: () ( ) ( ) ( ) ( ) Selanjutnya dua fakta ini dinyatakan sebagai teorem berikut ini. Teorema 1.7: Jika dan bilangan-biangan asli dengan maka: a. ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) b. ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) Buktikan teorema 1.7 tersebut sebagai latihan! (Gunakan induksi matematik). Contoh: Buktikanlah bahwa ( )( ) ( ) Jawab: ( )( ) ( ) ( ) ( ) Maka jumlahan pada ruas kiri dalam soal cerita tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut: ( ) ( ) ( ) ( ) *( ) ( ) ( ) ( )+ ( ) (Sesuai teorema 1.7b di atas). Contoh 1.16: Buktikan bahwa ( ) ( ) Jawab: Perhatikan bahwa dapat ditulis sebagai ( ) Sehingga ruas kiri dari soal tersebut dapat ditulis sebagai: Contoh 1.17: Buktikan bahwa ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ! Jawab: Pada teorema binomial di atas, jika maka diperoleh: () () () () ( ) () (() () () () ( ) () (() () () () () () Selanjutnya, menginga teorema 1.4 diperoleh: () () () () ()) () ( )) () () A.4. Latihan Kegiatan Belajar 1 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1. Buktikan

bahwa ( ) ( ) untuk setiap bilangan asli ! 2. Buktikan **bahwa ( ) ( )( ) untuk setiap bilangan asli** ! 3. **Buktikan** 58

( )

untuk setiap bilangan asli ! 4. Buktikan **bahwa ∑ ( ) ( ) untuk setiap bilangan asli** ! 5. Tunjukkan ( )! **6** . Buktkan **bahwa** 58

untuk , berlaku ( ) ( ) jika dan hanya jika suatu bilangan 7. Bukitkan bahwa ( ) ( ) ( )! 8. Jika , buktikan bahwa ( ) ( ) ( ) ( )! gasal dan ( )! 9. Tentukan ( ) ( ) ( ) 10. Tentukan ∑ ( ) (!)! B. KEGIATAN BELAJAR 2 B.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 2 Bahan kajian : relasi keterbagian Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang relasi keterbagian. Indikator pembelajaran : ‣ mahasiswa mampu merumuskan konsep relasi keterbagian. ‣ mahasiswa mampu mengimplemnetasikan konsep dan prinsip dari relasi keterbagian untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan dan sistem bilangan bulat. B.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 2 A. Relasi Keterbagian Semesta pembicaraan

dalam teori bilangan adalah himpunan semua bilangan bulat . Bilangan-bilangan bulat **dinyatakan dengan huruf-huruf latin kecil** 70

dan sebagainya yang dapat bernilai positif, negatif, atau nol. Namun, banyak pembahasan dalam teori bilangan yang semesta pembicaraannya terbatas pada himpunan semua bilangan asli.

Definisi 2 .1: **Bilangan bulat membagi (habis) bilangan bulat ditulis | , jika dan hanya jika ada bilangan bulat sedemikian hingga . Jika tidak membagi (habis) , maka ditulis . Contoh** 2.1: 1) | , **karena ada bilangan bulat** , yaitu , **sedemikian hingga** . 2) | , **karena ada bilangan bulat** , yaitu , sedemikian **hingga** 7

( ) . 3) | ,

karena ada bilangan bulat , yaitu , **sedemikian hingga** ( ) . 4) , **karena tidak ada** biangan **bulat** k, sedemikian **hingga** 7

. Bilangan bulat pada definisi 2.1 tersebut adalah tunggal, karena jika ada bilangan bulat selain sedemikian hingga dan maka sehingga Jika dan Istilah: dan , maka tidak ada bilangan yang memenuhi , maka terdapat tak hingga bilangan bulat yang memenuhi . Tetapi jika . Untuk seterusnya istilah “membagi habis” dan “terbagi habis” berturut-turut disingkat menjadi “membagi” dan “terbagi”, “ membagi ” dan “ terbagi ” keduanya simbolkan dengan “ | ,” adalh “ faktor dari ”, “ adalah pembagi dari ” atau “ adalah kelipatan dari ”. Jika , , dan adalah bilangan-bilangan bulat dengan dan , maka disebut hasil bagi (quotient) dari oleh .

Disebut pula bahwa adalah faktor dari yang menjadi komplemen (sekawan) **dari , atau dengan singkat dikatakan bahwa dan adalah pembagi-pembagi sekawan (komplementer) dari** 55

. Jika | , menurut definisi 2.1, maka ada bilangan bulat m sehingga . Karena , maka , sehingga menurut definisi 2.1 diperoleh | . Hal ini berarti

relasi keterbagian pada himpunan **bilangan bulat** mempunyai **sifat** transitif. **Sifat** ini dinyatakan **sebagai** teorema **berikut: Teorema** 2. **1: Jika | dan | , maka** 69

| . Jika | yaitu membagi habis , maka membagi habis setiap kelipatan , yaitu | , untuk setiap

bilangan bulat . Hal **ini dinyatakan** sebagai **teorema berikut ini: Teorema 2** .2: **Jika | maka** 81

| untuk setiap bilangan bulat . Jika | dan | , menurut definisi 2.1 , maka diperoleh dan untuk bilangan- bilangan bulat dan . Dari dua kesamaan ini dapat diperoleh bahwa: (i) ( ) berarti |( ) (ii) ( ) berarti |( ) dan (iii) ( ) berarti | . Ketiga kesimpulan ini dinyatakan sebagai ini: Teorema 2.3: Jika | dan | , maka |( ), |( ), dan | . Teorema terakhir ini dapat diperluas dalam sebuah pernyataan yang dinyatakan dalam teorema berikut ini ini yang biasa disebut sifat linearitas. Teorema 2.4: (Sifat Linieritas) Jika | dan | , maka ( ) untuk setiap bilangan bulat dan . Bukti: Karena | dan | , menurut teorema 2.2, maka | dan | untuk setiap bilangan- bilangan m dan n. Selanjutnya, menurut teorema 2.3, maka |( ). Teorema 2.5: (i) | untuk setiap bilangan bulat a (sifat reflektif). (ii)

Jika | maka | untuk setiap bilangan bulat . (iii) **Jika** | dengan , **maka** | . (iv) | **dan** | . (v) Jika | **maka** 15

. (vi) Jika | dengan , maka | | | |. (vii)Jika | dengan | , maka | | | |. B.4. Latihan Kegiatan Belajar 2 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1. Buktikan bahwa jika | untuk setiap bilangan bulat ! 2. Jika | , tunjukkan bahwa ( )| , |( ), dan ( )|( ) ! 3. Buktikan bahwa

jika | dan | , maka | ! 4. Jika | dan | , buktikan bahwa | ! **5** . Buktikan bahwa **jika |( ), maka |( ) ! 6** . Benarkah pernyataan : **jika |( ), maka** 5

| atau | . Berilah alasan! 7. Buktikan bahwa hasilkali dua bilangan bulat berurutan selalu terbagi oleh dua ! 8. Buktikan bahwa hasilkali tiga bilangan bulat berturutan selalu terbagi oleh 6! 9. Buktikan bahwa hasilkali tiga bilangan bulat berturutan selalu terbagi oleh 3! 10. Buktikan bahwa ( ), untuk setiap bilangan bulat ! C. KEGIATAN BELAJAR 3 C.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 3 Bahan kajian : induksi matematik dan teorema bilangan Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang faktor persekutuan terbesar dan kelipakatan persekutuan terkecil. Indikator pembelajaran : ‣ mahasiswa mampu merumuskan konsep dan mengimplementasikan faktor persekutuan terbesar untuk menyelesaikan masalah. ‣ mahasiswa mampu merumuskan konsep dan mengimplementasikan kelipatan persekutuan terkecil untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, dan relasi keterbagian. C.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 3 A. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) Kita telah mengetahui bahwa semua faktor bulat positif dari adalah dan Sedangkan semua faktor-faktor persekutuan (pembagi-pembagi bersama) dari dan 45 adalah dan Dan faktor persekutuan terbesar dari dan adalah

Secara umum, pengertian tentang faktor pesekutuan **dari dua bilangan bulat dituliskan** sebagai definis **berikut** ini. **Definisi** 7

3.1: Jika dan adalah bilangan-bilangan bulat, maka

bilangan bulat disebut faktor persekutuan dari **a dan b jika** dan | **dan | . Karena 1 adalah** pembagi (**faktor**) dari **setiap bilangan bulat** , maka 1 **adalah faktor** 31 persekutuan dari dua bilangan bulat merupakan faktor persekutuan dari dan . Jadi, himpunan semua persekutuan dari dan tidak pernah

kosong. Setiap bilangan bulat kecuali **nol** selalu **membagi nol, sehingga** jika , **maka** setap **bilangan bulat merupakan faktor** persekutuan dari **dan . Dalam hal ini** , himpunan semua **faktor** 31

persekutuan bulat positif dari dan b merupakan himpunan tak hingga. Jika sekurang-kurangnya satu dari dan

tidak sama dengan nol, maka himpunan semua **faktor persekutuan** bulat positif **dari a dan b** 21

merupakan himpunan berhingga, sehingga mesti

ada anggota dari himpunan tersebut yang terbesar dan **disebut** faktor persekutuan **terbesar** (FPB) **dari dan** 47

. Secara formal, hal tersebut dinyatakan sebagai definisi berikut ini. Definisi 3.2: Jika dan bilangan-

bilangan bulat yang sekurang-kurangnya **satu diantaranya tidak sama dengan nol, maka faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dan diberi simbol " adalah suatu bilangan positif, misalnya , yang memenuhi a. | dan** | serta **b. Jika | dan | , maka** 21

. Dari definisi tersebut dapat dimengerti

bahwa jika , maka . Dan jika **ada faktor persekutuan lain, misalnya** e, **maka . Contoh** 7

3.1: Faktor-faktor bulat positif dari

adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Faktor -faktor bulat positif **dari adalah 1, 2, 3, 5, 6,10,15, dan 30** . Maka **faktor** -faktor **persekutuan** yang positif **dari -12 dan 30 adalah 1,2,3,dan 6** . Jadi, **faktor persekutuan terbesar dari** 39

-12 dan 30 adalah 6, atau dapat ditulis secara singkat sebagai . Selanjutnya, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa , ; . Perhatikan bahwa apakah Misalkan ? , maka dan dan | dan | . . Jika , | | maka ada bilangan bulat , sehingga maka ada bilangan bulat , sehingga atau . . Karena dan , maka ,maka dan . , maka adalah faktor persekutuan dari dan . Karena , yaitu , sebab suatu bilangan bulat positif. Karena Uraian tersebut merupakan bukti dari teorema berikut ini. Teorema 3.1: Jika , maka . Jika dan

dua bilangan bulat positifi **dengan , maka dikatakan bahwa dan saling prima atau prima relatif terhadap** 7

. Misalkan dan dua bilangan bulat dengan , maka b dibagi oleh akan memberikan hasil bagi dan sisa pembagian. Hal ini dinyataan sebagai teorema berikut ini dan terkenal dengan nama Algoritma Pembagian. Teorema 3.1. Jika

dan b bilangan-bilangan bulat dengan , maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat dan yang memenuhi , dengan 12

. Bukti: Dibentuk himpunan { }. S bukan merupakan himpunan kosong sebab jika | | dan karena , maka . Karena S beranggotakan bilangan-

bilangan bulat tak negatif berbentuk , **maka** S pasti **memiliki anggota terkecil** , misalkan . **Sesuai dengan bentuk anggota** dari S, **maka , untuk suatu bilangan bulat dan , Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa** 12

. Andaikan , maka dengan . Jadi, , karena , maka . Ini berarti bahwa adalah suatu anggota dari S. Tetapi .

Hal ini tidak mungkin, karena adalah bilangan bulat tak negatif yang terkecil dalam S. Oleh karena itu, pengandaian tersebut harus diingkari. **Jadi, , sehingga ada dan sedemikian sehingga dengan . Selanjutnya** kita **akan** menunjukkan **ketunggalan dari dan** . Misalkan bahwa b **mempunyai dua representasi, yaitu** 12

: dengan dan . Maka . | | | | karena Dari – dan diperoleh atau | | . Jadi, | | , yang menghasilkan | | . Karena | |

adalah bilangan bulat tak negatif, maka hanya mungkin jika | | , yaitu , sehingga juga 12

. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka teorema tersebut diperluas untuk , sehingga diperoleh akibat sebagai berikut: Akibat 3.1 Jika dan

bilangan-bilangan bulat dengan , maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat dan 12

sedemikian hingga dengan | | Untuk membuktikan akibat ini, kita cukup memperhatikan untuk yang negatif maka | | , sehingga dengan teorema 2.7 tersbebut menghasilkan pasangan bilangan-bilangan bulat tunggal dan yang memenuhi: dengan | | Perhatikan bahwa | | dan mengambil untuk mendapatkan dengan || Sebagai ilustrasi, jika dan , maka dan , yaitu: 3 Di sini tampak bahwa Apakah benar, jika , maka ? Misalkan dan , maka kita akan menunjukkan bahwa , karena , maka | dan | , karena , maka | . Dari | dan | , maka d adalah faktor persekutuan dari dan , tetapi karena maka . Selanjutnya, karena , maka | dan | dan karena , maka | . Dari | dan | , maka d adalah faktor persekutuan dari dan . Tetapi karena maka . , , Selanjutnya, karena , maka | dan | dan karena , maka | . Dari | dan | , maka adalah faktor persekutuan dan . Tetapi karena dari , maka . Dari dan , maka c=d, yaitu . Uraian tersebut merupakan bukti dari teorema berikut ini. Teorema 3.2: Jika , maka , maka . Dengan menggunakan teorema ini, memudahkan kita untuk menghitung faktor persekutuan terbesar

dari sembarang bilangant **bulat, meskipun bilangan-bilangan bulat tersebut cukup besar** 14

. Contoh 3.2: Carilah (5767, 4457) Penyelesaian : Kita gunakan algoritma pembagian (teorema 2.8) , maka , maka , maka , maka , maka Faktor persekutuan terbesar dari

a dan b dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari **dan** yaitu berbentuk **dengan** 96

dan bilangan-bilangan bulat tertentu. Misalnya : Uraian ini memberikan contoh untuk teorema berikut ini: Teorema 3.2: Jika dan

bilangan bulat tidak nol, maka ada bilangan-bilangan bulat dan , sedemikian 83

hingga . Bukti: Dibentuk himpunan S yaitu himpunan semua kombinasi linear dari dan yang bernilai positif. { | } S bukan himpunan kosong, sebab jika dan dengan , maka , dengan dan , maka | | . Karena S memuat bilangan-bilangan bulat positif, maka S memuat anggota yang terkecil, misalnya d, karena , maka ada bilangan-bilangan bulat dan sehingga . Selanjutnya, kita akan mnunjukkan bahwa . Perhatikan dan , menurut algoritma pembagian, maka ada bilangan-bilangan bulat dan sedemikian hingga : dengan Karena dan r merupakan kombinasi linear dari dan , maka . Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa d adalah anggota terkecil dari S (ingat bahwa). Jadi, , sehingga atau | . Dengan penalaran yang sama diperoleh | , sehingga adalah faktor persekuuan dari dan .

Selanjutnya, jika adalah sembarang faktor persekutuan dari dan , yaitu | dan | , maka | atau | , sehingga . Ini berarti bahwa . Bukti teorema 2.9 tersebut hanya merupakan bukti eksistensi dan tidak memberikan cara mencari nilai-nilai dan . Hal ini akan dibahas kemudian. Sesuai dengan teorema 3.2 tersebut, jika ,

maka ada bilangan -bilangan **bulat dan sedemikian hingga** . Sebaliknya **jika** untuk **bilangan** -bilangan **bulat dan** 7

tertentu, apakah ? Misalkan bahwa , maka | dan | , sehingga menurut teorema 2.2 didapat | atau , maka . Teorema 3.3: Jika dan dua

bilangan bulat tidak nol , maka **dan saling prima jika dan hanya jika ada bilangan** -bilangan **bulat dan** 31

yang memenuhi . Contoh 3.3: Hitunglah dan ditenttukan bilangan-bilangan bulat dan yang memenuhi . Jawab: Jadi, . Selanjutnya, Jadi, dan Tetapi nilai dan yang memenuhi tidak tunggal, sebab , untuk setiap bilangan bulat . Jadi, dan , untuk setiap bilangan bulat . Misalkan | dan | dapatkah kita menyimpulkan bahwa | ? Diambil contoh sebagai berikut: | dan | maka tidak benar bahwa | , tetapi jika diberi tambahan ketentuan bahwa (a,b)=1, maka kita dapat menyimpulkan bahwa | . Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Karena , menurut teorema 2.10 tersebut, maka ada bilangan-bilangan bulat dan sedemikian hingga: Jika kedua ruas dikalikan , maka diperoleh persamaan: Karena | dan | , maka ada bilangan-bilangan bulat dan sedemikian hingga dan . Sehingga persamaan (1) menjadi: Ini berarti bahwa | Uraian tentang akibat dari teorema 2.10 tersebut dinyatakan sebagai berikut: Akibat 3.2: Jika | dan | dengan , maka | . Jika diketahui bahwa | , apakah kita dapat meyimpulkan bahwa | atau | ? Diambil sebagai contoh: | maka tidak benar jika kita mengambil kesimpulan bahwa | ataupun | . Tetapi jika | ditambah ketentuan , maka kita dapat menyimpulkan bahwa | . Hal itu ditunjukkan sebagai berikut:

Karena , maka ada bilangan -bilangan **bulat dan** sedemikian hingga: **Jika kedua ruas dari persamaan ini dikalikan** dengan c, maka **diperoleh** 5

: Karena | dan | , maka | atau | . Uraian yang tampak sederhana ini, tetapi pernyataan itu merupakan hal yang fundamental (mendasar) dan biasa disebut dengan “lemma Euclid”. Teroema 3.4 (Lemma Euclid) Jika | dan , maka | . B. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) Di Sekolah Dasar dan Sekolah Lanjutan, kita telah mempelajari kelipatan persekutuan terkecil (KPK). Misalnya, kelipatan bulat positif dari 3 adalah Kelipatan bulat positif dari 4 adalah Maka kelipatan persekutuan dari 3 dan 4 adalah Selanjutnya istilah “kelipatan bulat positif” hanya dikatakan lebih singkat menjadi “kelipatan” saja. Selanjutnya

secara umum pengertian kelipatan **persekutuan dari dua bilangan bulat** dinyatakan dalam **definisi berikut** ini. **Definisi** 7

3.2: Misalkan dan

adalah bilangan-bilangan bulat, adalah kelipatan persekutuan dari dan jika | dan 35

| . Nol (0) adalah suatu kelipatan persekutuan dari dan . dan – masing-masing juga merupakan suatu kelipatan persekutuan dari dan . Jadi, himpunan semua kelipatan persekutuan bulat positif a dan b tidak pernah sama dengan himpunan kosong. Himpunan semua kelipatan bulat positif dari 6 adalah { Himpunan semua kelipatan bulat positif dari -9 adalah { } } Jadi, himpunan semua kelipatan persekutuan dari

6 dan -9 adalah { }, **sehingga kelipatan persekutuan dari 6 dan -9 adalah 18** 34

.

Ingat bahwa dalam himpunan bagian dari himpunan bilangan-bilangan bulat positif selalu mempunyai anggota terkecil , sehingga **KPK** 34 dari sebab dua biangan bulat selalu ada. Secara formal, KPK dari dua bilangan bulat didefinisikan sebagai berikut: Kelipatan persekutuan terkecil (KPK)

dari dua bilangan bulat tidak nol **a dan b adalah** suatu **bilangan bulat positif** 84

m ditulis [ ] , jika memenuhi: (i) | dan | , (ii) jika | dan | , maka . Dalam definisi ini dapat dimengerti bahwa kelipatan dari setiap dua bilangan bulat yang tidak nol selalu merupakan suatu bilangan bulat positif. Dalam (i) pada definisi itu mengatakan bahwa masing-masing dari dua bilangan itu membagi kelipatan persektutuan terkecilnya, sedangkan (ii) mengatakan bahwa kelipatan persekutuan lainnya tidak lebih kecil dari KPK dari dua bilangan itu. Contoh 3.5: [ ] , maka | dan | . Perhatikan pada

contoh di atas, yaitu himpunan semua kelipatan persekutuan bulat positif dari 6 dan -9 adalah 34

{ } dan KPK dari 6 dan -9 adalah 18 atau ditulis [ ] . Tampak di sini tHal ini dapat dikar Hal ini dapat dikatakan bahwa setiap kelipatan persekutuan dari dua bilangan bulat selalu terbagi oleh KPK dari dua bilangan tersebut. Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini: Teorema 3.5: Jika

adalah suatu kelipatan persekutuan dari dua bilangan bulat tidak nol dan , maka KPK dan membagi , yaitu [ ]| . Bukti: Misalkan [**a,b** 35

]=m, maka harus ditunjukkan bahwa | . Andaikan maka algoritma pembagian, ada bilangan bulat q dan r sedemikian hingga dengan Karena adalah kelipatan persekutuan

dari a dan b, maka | dan | . **Karena** [ ] , maka | **dan | . | maka | dan | , maka** 17

| . Demikian pula | , maka | dan karena | , maka | . Berarti | . Karena | dan | maka r adalah kelipatan persekutuan dari dan . Tetapi karena [ ] dan , maka hal tersebut tidak mungkin (kontradiksi). Jadi, pengandaian di atas tidak benar, berarti | atau [}| . Perhatikan bahwa [ ] dan [ ] [ ] . Tampak bahwa [ ] [ ]. Hal ini memberikan ilustrasi dari teorema berikut ini: Teorema 3.6: Jika , maka [ ] [ ]. Bukti : Misalkan [ ] , maka | dan | , sehingga | dan | . Hal ini berarti dc adalah kelipatan persekutuan dari ac dan bc. Dan menurut teorema 2.10, maka [ ]| . Karena [Misalkan [ ] adalah suatu kelipatan dari , maka [ ] , maka | , sehingga | .] adalah suatu kelipatan dari . Teorema 3.7: Jika , maka [ ] [ ] Bukti: Misalkan [ ] , maka | dan | , sehingga | . Hal ini berarti dc adalah kelipatan persekutuan dari aca dan bc. Dan menurut teorea 2.10, maka [ ]| . Karena [ ] adalah suaut kelipatan dari ac, maka [ ], sehingga | . Karena [ ] , maka | dan | , sehingga | dan | , dan menurut teorema 2.12, maka [ ]| , yaitu | dan karena | , maka Sehingga , yaitu [ ] [ ]. . Contoh 3.7: (1) [ ] [ ] [ ] (2) [ ] [ ] [ ] Mengingat teroema tersebut, maka

dengan mengeluarkan faktor persekutuannya akan mempermudah dalam mencari KPK -nya. **Jika** , berapakah [**a,b** 35

]? Apakah [ ] ? Akan ditunjukkan sebagai berikut: Jelas bahwa ab adalah suatu kelipatan persekutuan dari a dan b, menurut teorema 2.12, maka [ ]| . Di lain pihak, menurut akibat dari teorema 2.10, karena |[ ] dan |[dengan , maka |[ ] dan karena [ ]| , maka disimpulkan [ ] .] Selanjutnya, jika , maka ( ) . Berdasarkan pada kesimpulan di atas, maka * + . Jika kedua ruas dikalikan , maka diperoleh bahwa [ ] [ ] [ ] Uraian di atas merupakan bukti teorema berikut ini: Teorema 3.7: Jika dan bilangan-bilangan bulat yang keduanya positif, maka Contoh 3.8: (1) Karena dan [ ] , terdapat hubungan . [ ] [ ] (2) dan [ ] , terdapat hubungan [ ] 25·18n B.4. Latihan Kegiatan Belajar 3 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1. Jika buktikan bahwa | untuk setiap bilangan-bilangan bulat da ! 2. Jika | dan buktikan bahwa !

3. Jika a dan b bilangan-bilangan bulat tidak nol 11

, tunjukkan bahwa ! 4. Jika n suatu bilangan bulat positif dan a sembarang bilangan bulat, buktikan bahwa |! 5. 6. 7. Jika dan | , buktikan bahwa Buktikan bahwa ( ) ! Buktikan bahwa ! ! 8. 9. Buktikan jika suatu kelipatan persekutuan dari dan , maka Buktikan jika [ ] , maka | ! | ! 10. Jika | , maka [ ] ! D. KEGIATAN BELAJAR 4 D.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 4 Bahan kajian : basis bilangan bulat. Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang basis bilangan bulat. Indikator pembelajaran : mahasiswa mampu merepresentasikan suatu bilangan dalam berbagia basis. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, relasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, dan kelipatan persekutuan terkecil. D.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 4 A. BASIS BILANGAN BULAT Cara yang telah kita kenal untuk menuliskan lambang bilangan bulat adalah dengan notasi desimal (basis sepuluh). Lambang dasar yang digunakan dalam basis sepuluh adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Lambang bilangan-bilangan bulat lainnya dituliskan dengan menerapkan nilai tempat dengan menggunakan lambang dasar tersebut, seperti yang telah kita kenal sejak di sekolah dasar. Contoh 4.1: Penggunaan basis sepuluh yang biasa kita lakukan, bukan satu-satunya basis untuk menuliskan lambang bilangan, kemungkinan hanya karena banyaknya jari tangan kita berjumlah sepuluh. Tak ada alasan khusus lainnya dari penggunaan basis sepuluh yang telah biasa kita lakukan. Bangsa babilonia kuno menggunakan basis enam puluh, bangsa maya menggunakan basis dua, delapan atau enam belas untuk menyatakan lambang bilangan bulat. Teorema 4.1: Misalkan suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, maka setiap bilangan bulat positif n dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk dengan k suatu bilangan bulat taknegatif, suatu bilangan bulat dengan untuk dengan

Bukti: Untuk memperoleh reprentasi **dari seperti yang diinginkan, kita menerapkan algoritma pembagian** sebagai **berikut. Pertama, kita membagi dengan untuk mendapatkan** 28

Jika , kita membagi dengan b dan mendapatkan bahwa , Kita melanjutkan proses ini untuk memperoleh , , . . . , , Langkah terakhir dari proses ini terjadi apabila kita memperoleh hasilbagi

0. Perhatikan bahwa dalam penerapan algoritma -algoritma pembagian **tersebut, kita** memperoleh hasilbagi-hasilbagi **yang memenuhi** 28

Karena barisan adalah suatu barisan turun dari bilangan-bilangan bulat tak negatif, maka barisan ini akan berakhir pada suku 0. Selanjutnya dari persamaan pertama disubtitusi dalam persamaan kedua diperoleh . . . Dimana karena untuk dan adalah hasilbagi terakhir yang tidak sama dengan 0. Kita telah mendapatkan representasi dari n seperti yang diinginkan. Untuk memperlihatkan bahwa representasi n tersebut tunggal, misalkan kita mempunyai dua representasi dari n, yaitu: , dan , Jika kedua persamaan tersebut dikurangkan, maka diperoleh ( ) ( ) ( ) ( ) Jika kedua represetasi dari n tersebut berbeda, maka ada bilangan bulat terkecil j, , sedemikian hingga {( ) (. jadi) ( ) ( )} sehingga ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) {( ) ( ) ( )} Ini berarti bahwa |( ) Tetapi karena dan , yaitu , sehingga , yaitu Jadi, representasi dari n adalah tunggal. Selanjutnya, jika yaitu

dinyatakan sebagai jumlahan dari perpangkatan bulat dari , maka dapat dituliskan sebagai 28

( ) Contoh 4.2: 1) 2) Jadi (dalam basis 10) Seperti telah dikatakan di atas basis 10 disebut pula basis desimal.

Basis 2 disebut **biner, basis 4** disebut **quarter, basis 8** disebut **oktal dan basis 16** disebut **heksadesimal** 28

atau secara singkat heks. Koefisisen dalam ekspansi jumlahan itu disebut angka (digits). Angka biner biasa disebut dengan bits, yang merupakan singkatan dari binary digits yang merupakan istilah dalam computer. Untuk mengubah penulisan bilangan dari basis decimal ke basis nondesimal, kita menggunakan proses algoritma pembagian berulang-uang seperti pada proses pada pembuktian teorema diatas. Contoh 4.4: Tulislah dalam lambang bilangan dengan basis . Jawab: Penerapan algoritma pembagian berulang-ulang, yaitu:

Penulisan bilangan bulat n seperti ini dikatakan bahwa dituliskan **dalam basis** 28

. Contoh 4.5: Misalnya b = 5 sebagai basis penulisan, maka lambang dasarnya adalah dan . Misalkan suatu bilangn bulat n dinyatakan sebagai: Maka dalam basis 5, n tersebut ditulis sebagai n = 320145. Jika n ingin ditulis dalam basis decimal (sepuluh), maka kita tinggal menghitung jumlahan dari perpangkatan lima tersebut, yaitu: Jika kita ingin menuliskan lambang bilangan tersebut dalam basis lainnya, misalnya basis , maka kita mengerjakannya seperti dalam proses pembuktian teorema di atas, yaitu: ( ) ( ) Ini berarti

Untuk selanjutnya penulisan lambang bilangan dengan basis 10, indeks 10 yang menyatakan basis yng digunakan **tidak perlu dituliskan. Sehingga cukup ditulis** 62

2134 Berdasarkan teorema di atas, setiap bulat positif dapat ditulis dalam basis 2, yaitu: dengan adalah 0 atau 1. Jadi , yaitu menuliskan sisa-sisa pembagian itu dengan urutan dari bawah ke atas, seperti ditunjukkan anak panah. Untuk mengubah penulisan lambang bilangan dari basis non desimal ke decimal, kita tuliskan lambang bilangan dengan basis non decimal itu dalam bentuk panjang (bentuk jumlahan dari perpangkatan basis tersebut). Contoh 4.5: Tuliskan 32014 dalam basis desimal ! Jawab: Jadi Komputer, selain menggunakan basis 2, juga menggunakan basis 8 atau 16. Dalam

heksadesimal (basis 16) mempunyai 16 **lambang dasar, yaitu: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F Huruf-huruf A, B, C, D, E** , dan **F digunakan untuk menyatakan angka-angka yang bersesuaian dengan 10, 11, 12, 13, 14** 33

, dan 15 (dalam basis desimal). Contoh berikut ini menunjukkan cara mengubah lambang bilangan dari heksadesimal ke desimal Contoh 4.6: (1) (2) B.4. Latihan Kegiatan Belajar 2 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1. Buktikan bahwa jika | untuk setiap bilangan bulat ! 2. Jika | , tunjukkan bahwa ( )| , | ( ), dan ( )|( ) ! 3. Buktikan bahwa

jika | dan | , maka | ! 4. Jika | dan | , buktikan bahwa | ! **5** . Buktikan bahwa **jika |( ), maka |( ) ! 6** . Benarkah pernyataan : **jika |( ), maka** 5

| atau | . Berilah alasan! 7. Buktikan bahwa hasilkali dua bilangan bulat berurutan selalu terbagi oleh dua ! 8. Buktikan bahwa hasilkali tiga bilangan bulat berturutan selalu terbagi oleh 6! 9. Buktikan bahwa hasilkali tiga bilangan bulat berturutan selalu terbagi oleh 3! 10. Buktikan bahwa ( ), untuk setiap bilangan bulat ! E. KEGIATAN BELAJAR 5 E.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 5 Bahan kajian : bilangan prima Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep bilangan prima dan faktorisasi bilangan bulat. Indikator pembelajaran : ‣ mahasiswa merumuskan konsep bilangan prima. ‣ mahasiswa memfaktorkan bilangan sebagai hasil kali faktor-faktor primamahasiswa mampu merepresentasikan suatu bilangan dalam berbagia basis. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, relasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat. E.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 5 A. Bilangan Prima Kita telah mengenal dua bilangan bulat positif saling prima (prima relatif atau koprima), yaitu faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan itu sama dengan . Jika adalah bilangan-bilangan bulat positif sedemikian hingga , maka dikatakan bahwa , untuk setiap i, j = 1, 2, 3, ..., n dengan saling prima pula, tetapi, jika , maka dikatakan bahwa bilangan- bilangan bulat positif

saling prima dua-dua atau saling prima sepasang demi sepasang 94

. Contoh 5.1: (1) Karena , maka dan dikatakan tiga bilangan yang saling prima dan sekaligus saling prima sepasang-demi sepasang, karena . (2) Karena , maka , dan adalah empat bilangan yang saling prima, tetapi bukan merupakan empat bilangan yang saling prima sepasang-demi sepasang, sebab dan , meskipun . Misalkan dan bilangan-bilangan bulat positif, maka menurut algoritma pembagian ada bilangan-bilangan bulat dan sedemikian hingga Jika diketahui , maka menurut Teorema 2.8 kita dapat menyimpulkan bahwa . Hal ini dapat dikatakan bahwa jika sisa pembagian oleh saling prima dengan , maka saling prima dengan pula. Definisi 4.1:

Bilangan bulat positif yang **lebih** besar **dari** dan **tidak** mempunyai **faktor** bulat **positif kecuali dan bilangan** bulat **itu** 76

sendiri disebut bilangan prima. Bilangan buat positif **yang lebih besar dari dan bukan** bilangan **prima disebut bilangan komposit** 47 (tersusun). Barisan bilangan prima: Barisan bilangan komposit: Perhatikan bahwa 1 bukan bilangan prima dan bukan bilangan komposit pula. Satu (1) disebut unit. Jadi himpunan semua bilangan bulat positif (bilangan asli) terbagi dalam tiga himpunan bagian yang saling lepas, yaitu (1) himpunan semua bilangan prima; (2) himpunan semua bilangan komposit; dan (3) himpunan unit. Perhatikan suatu bilangan bulat positif, misalnya , maka dapat diuraikan atas faktor-faktor prima, yaitu: atau atau atau lainnya Perbedaan penguraian dari atas faktor-faktor prima tersebut hanya berbeda pada urutan faktor-faktornya saja. Hal ini merupakan suatu contoh bahwa suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima tertentu. Bentuk perkalian bilangan-bilangan prima itu adalah tunggal, kecuali urutan dari bilangan- bilangan prima tersebut. Hal ini sering disebut dengan Teorema Faktorisasi Tunggal. Teorema-teorema nerikut merupakan persiapan untuk membuktikan teorema faktorisasi tunggal. Teorema 4.2:

Setiap bilangan bulat positif **yang lebih** besar **dari** dapat **dibagi oleh suatu bilangan prima. Bukti** : Ambil sembarang **bilangan bulat positif** . Apabila **n** 68

suatu bilangan prima, maka , berarti teorema telah terbukti.

Jika suatu bilangan komposit, maka mempunyai faktor bulat positif **selain 1 dan , misalnya , yaitu . Sehingga ada bilangan bulat positif sedemikian** hingga **Jika suatu bilangan prima, maka** 27

. Sehingga teorma terbukti.

Tetapi jika suatu bilangan komposit, maka mempunyai faktor bulat positif **selain 1 dan , misalnya , yaitu . Sehingga ada bilangan bulat positif sedemikian** hingga **Jika suatu bilangan prima, maka** maka . **Dan** karena , **maka . Jadi** n **terbagi oleh bilangan prima** 27

, berarti teorema terbukti.

Tetapi jika suatu bilangan komposit, maka mempunyai faktor bulat positif **selain 1 dan , misalnya , yaitu** . Ini berarti **ada bilangan bulat positif sedemikian** hingga **dengan Jika suatu bilangan prima, maka . Karena dan , maka . Jadi** n **terbagi oleh bilangan prima** 27

, berarti teorema terbukti. Tetapi jika suatu bilangan komposit, maka proses seperti di atas dapat dilanjutkan sedemikian hingga diperoleh suatu barisan: Penguraian di atas faktor-faktor komposit ini tentu berakhir pada suatu faktor prima, karena faktor-faktir tersebut selalu lebih kecil dari bilangan yang difaktorkan dan selalu lebih besae dari 1. Misalkan pemfaktoran tersebut berakhir pada faktor prima , maka dan Bukti alternatif lain: Karena

suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, maka 28

n mempunyai sekurang- kurangnya satu faktor bulat positif katakan n sendiri. Sehingga n mesti mempunya faktor bulat positif terkecil, misalnya 1, maka 1 adalah suatu bilangan prima. Sebab jika q bukan bilangan prima, maka dengan sehingga adalah fator bulat positif dari , tetapi karena q adalah faktor bulat positif terkecil dari n, maka terdapat kontradiksi. Memperhatikan teorema di atas, suatu bilangan bulat positif yang lebih besar 1 selalu terbagi oleh suatu bilangan prima, maka hasilbaginyapun akan terbagi oleh suatu bilangan prima pula. Dan hasilbagi berikutnyapun demikian pula. Sehingga suatu bilangan buat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian dan bilangan-bilangan prima tertentu.

Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini. Teorema 5.3: **Setiap bilangan bulat** 8

positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyaakan sebagai perkalian bilangan-bilabnan prima. Bukti: Ambil sebarang bilangan bulat positif . Menurut teorema 4.1, maka ada suatu bilangan prima sedemikian hingga sehingga . Sehingga ada suatu bilangan positif , dengan Jika , maka sehingga n suatu bilangan prima. Tetapi jika , maka menurut Teorema 4.1 lagi, ada suatu bilangan prima sedemikian hingga . Sehingga ada suatu bilangan bulat positif , sehingga dengan Jika , maka sehingga . Berarti teorema terbukti. Tetapi jika , maka ada suatu bilangan prima sedemikian hingga dengan Jika , maka sehingga berarti teoriema terbukti. Tetapi jika , maka proses seperti di atas dapat dilanjutkan sehingga akan berakhir pada , maka diperoleh , yaitu

bilangan bulat positif dapat dinyatakan **sebagai perkalian bilangan prima** . Suatu **bilangan bulat** 16

positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima. Mungkin saja di antara faktor-faktor prima tersebut ada yang sama, maka faktor-faktor yang sama dapat ditulis sebagai bilangan berpangkat. Contoh 5.2: dapat ditulis Hal ini secra umum,

jika n suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 60

1 dapat dinyatakan sebagai dengan adalah faktor-faktor prima dari n dan adalah eksponen-eksponen bulat tak negatif. Selanjutnya bentuk (1) disebut representasi dari n sebagai perkalian bilangan-bilangan prima atau sering pula disebut bentuk kanonik dari . Teorema 5.2 tersebut sangat memudahkan untuk menentukan FPB dan KPK dari dua bilangan bulat atau lebih, yaitu dengan menyatakan masing-masing bilangan bulat itu dalam bentuk kanoniknya. Tetapi sebelum itu, kita perlu mengenal lebih dulu notasi-notasi berikut ini. menyatakan nilai minimum dari dan . menyatakan nilai maksimum

dari a dan b . Misalnya : Misalkan , dan **adalah bilangan** -bilangan **bulat positif yang** lebih besar dari **1** 91

yang bentuk-bentuk kanoniknya berturut-turut sebagai berikut: Maka FPB dan KPK dari , , dan berturut-turut dengan untuk dengan untuk Contoh 5.3: Tentukan FPB dan KPK dari 198, 216, dan 252! Penyelesaian: Jika tiga bilangan tersebut diuraikan atas faktor-faktor prima, maka diperoleh : Uraian atas faktor-faktor prima tersebut dapat ditulis sebagai berikut: Jika diberikan suatu bilangan bulat positif, misalnya 2167, apakah bilanngan ini suatu bilangan prima? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita akan mencoba-coba membagi bilangan tersebut dengan 2,3,4,5, dan seterusnya, sampai sautu bilangan yang tidak lebih dari bilangan tersebut. Jika bilangan tersebut tak terbagi oleh salah satu dari pembagi- pembagi itu, maka bilangan tersebut adalah suatu bilangan prima. Cara ini jelas tidak efesien. Berikut ini suaut teorema yang memberikan batas sampai bilangan bulat positif mana jita berhenti membagi dan segera menyimpulkan bawa bilangan terebut adalah bilangan prima. Teorema 5.3: Jika suatu bilangan komposit, maka memiliki faktor dengan √ . Bukti: Karena suatu bilangan komposit, maka ada bilangan-bilangan positif dan sedemikian hingga dan Jika k dan m kedua-duanya lebih besar dari √ , yaitu √ dan √ , maka √ √ Terdapat , hal ini tidak mungkin. Oleh karena itu, salah satu dari k atau m harus tidak lebih kecil dari √ , misalnya k yaitu Jadi, memiliki faktor k dengan √ . √ . Teorema 4.3 tersebut sama benarnya dengan kontraposisinya, yaitu: Jika bilangan bulat positif n tidak memiliki faktor dengan √ , maka n adalah suatu bilangan prima. Dengan kontraposisi Teorema 4.3 tersebut, maka untuk menentukan apakah 2.167 merupakan suatu bilangan prima atau bukan, kita harus mencoba membagi bilangan itu dengan √ Tetapi ingat bahwa 2167 tak terbagi oleh 2, maka 2167 tak terbagi oleh semua kelipatan 2. Demikian pula 2167 tak terbagi olh 3, maka 2167 tak terbagi oleh kelipatan 3. Demikian seterusnya, sehingga kita cukup mencoba-coba membagi bilangan tersebut dengan bilangan-bilangan prima yang kurang dari 46. Dari contoh tersebut, kita dapat memperketat syarat perlu dari teorema 4.3, sehingga diperoleh teorema sebagai berikut: Teorema 5.4: Jika bilangan bulat positif tidak memiliki faktor prima dengan √ , maka suatu bilangan prima. E.4. Latihan Kegiatan Belajar 5 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! F. KEGIATAN BELAJAR 6 F.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 6 Bahan kajian : faktorisasi tunggal Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep faktorisasi tungal. Indikator pembelajaran : mahasiswa mampu mengimplementasikan konsep dan prinsip faktorisasi tunggal dalam menyelesaikan masalah Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, relasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, dan faktorisasi bilangan tunggal. F.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 6 A. Faktorisasi Tunggal Pada sub bab sebelumnya telah dibicarakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 terbagi oleh suatu bilangan prima, sehingga setiap bilangan bulat positifyang lebih besar dari 1 adalah suaut bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian dari bilangan-bilangan prima tertentu. Pada sesi ini akan dipelajari bahwa pembfaktoran suatu bilangan bulat positif atas faktor-faktor prima tunggal, tetapi sebelum membicarakan faktorisasi tunggal, kita akan mempelajari beberapa teorema sebagai persiaan untuk mempelajari faktorisasi tunggal. Teorema 6.1: Jika suatu bilangan prima dan | , maka | atau | . Bukti: Karena p suatu bilangan prima, maka untuk sebarang bilangat bulat a berlaku ( ) atau ( ) . Jika ( ) dan | , kita pernah membuktikan bahwa | . Buktikanlah kembali! Dan jika ( ) maka | . Jadi, terbukti bahwa | atau | . Teorema 4.5 ini dapat diperluas untuk bilangan-bilangan Jika suatu bilangan prima dan | , maka | untuk suatu yaitu: . Bukti: Kita akan membuktikan dengan induksi matematik pada , yaitu banyaknya faktor. Untuk Untuk atau | . , yaitu | , jelas benar. , yaitu | , karena p suatu bilangan prima, maka menurut Teorema 4.5 | Diambil sebagai hipotesis induksi untuk dengan | maka | untuk . , yaitu p bilangan prima dan Pandang | atau dapat ditulis sebagai |(Teorema 4.5 diperoleh | atau | .)( ), maka menurut Jika | , maka teorema telah terbukti. Jika | , maka menurut Teorema 4.5 lagi diperoleh | atau | . Jika | , maka teorema terbukti. Jika | maka proses seperti di atas dapat diteruskan. Berdasarkan hipotesis yang diambil, maka dapat diteruskan mesti akan berakhir. Berarti bilangan prima membagi salah satu dari . Jika pada teorema 4.5 diambil kasus bahwa p,q, dan r masing-masing bilangan prima dan | maka | atau | , yaitu atau . Karena p, q, dan r masing-masing bilangan prima kasus tersbut dapat diperluas sebagai berikut: Jika p, , , ,...., semuanya bilangan prima dan | , maka untuk suatu dengan . Selanjutnya kita akan membuktikan ketunggalan dari faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat positif. Teorema ini sering disebut faktorisasi tunggal yng merupakan teorema dasar dalam aritmetika. Teorema 6.2: Pemfaktoran suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari atas faktor-faktor prima adalah tunggal, kecuali urutan dari faktor-faktornya. Bukti: Pada teorema 4.2 kita telah membuktikan bahwa bilangan bulat positif

yang lebih besar dari 1 adalah suatu **bilangan prima atau** bilangan itu dapat **dinyatakan** sebagai **perkalian** dari **bilangan** 78 -bilangan **prima**

tertentu. Sekarang, kita akan membuktikan bahwa faktor-faktor prima tersebut adalah tunggal. Ambil sembarang bilangan bulat positif . Jika suatu bilangan prima, maka adalah faktornya sendiri. Jika suatu bilangan komposit dan diandalkan bahwa pemfaktoran n atas faktor-faktor prima adalah tidak tinggal, misalnya: dan dengan dan masing-masing adalah bilangan-bilangan prima untuk dan serta dan . Karena maka perluasan teorema 4.5, maka | sehingga | . Dan selanjutnya menurut untuk suatu k dengan . Dan mengingat , maka . Karena 4.5, maka , maka Karena dan untuk suatu m dengan . , maka . Dan menurut perluasan teorema . Dan mengingat sehingga dari pemisalan diatas kita maka | sehingga | memperoleh bahwa . Jika proses seperti di atas diteruskan, maka kita akan memperoleh bahwa sehingga . sehingga . Dan seterusnya. Jika maka proses tersebut akan berakhir pada Tetapi jika , maka akan diperoleh bahwa dan teorema terbukti. Hal ini mustahil, karena , sehingga adalah bilangan-bilangan prima, maka haruslah Ini berarti bahwa bilangan bulat positif n tersebut hanya dapat dinyatakan sebagi hasil kali faktor-faktor prima secara tunggal. Pembuktian yang lebih singkat dari teorema faktorisasi tunggal tersebut menggunakan induksi matematik. Coba lakukan pembuktian dengan induksi matematik ini dengan memperhatikan petunjuk berikut ini. Apakah teorema benar untuk ? Sebagai hipotesis, misalkan teorema benar-benar untuk bilangan bulat positif dan harus ditunjukkan bahwa benar untuk . Misalkan denan atau masing-masing adalah bilangan-bilangan prima .... dan seterusnya seperti bagian pembuktian di atas, sehingga diperoleh dan . Bilangan ini lebih kecil atau sama dengan , mengingat hipotesis, maka teorema benar untuk Dengan demikian terbuktilah teorema tersebut. Kita mengetahui bahwa banyaknya bilangan asli adalah tak berhingga dan setiap bilangan bulat positif dapat difaktorkan atas faktor-faktor prima. Apakah banyaknya bilangan prima itu tak berhingga pula? Euclides membuktikan dengan bukti tak langsung (bukti dengan kontradiksi) bahwa benyaknya bilangna prima adalah tak berhingga. Misalkan , , , , ... adalah urutan bilangan-bilangan prima dan andaikan ada bilangan prima terbesar, misalkan , sekarang dibentuk suatu bilangan bulat positif: Karena , menurut Teorema 4.1, maka dapat dibagi oleh suatu bilangan prima, sehingga dapat dibagi oleh sekurang-kurangnya satu bilangan prima dari , , ,...., . Misalnya bilangan prima dengan yang membagi N, yaitu | . , dengan | dan | , maka | . Hal ini tidak mungkin, karena adalah suatu bilangan prima. Oleh karena itu pengandaian bahwa ada bilangan prima terbesar adalah tidak benar; sehingga pengandaian tersebut harus diingkari, dan diperoleh bahwa tak ada bilangan primer terbesar. Atau dengan kata lain bahwa banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga. Hal ini terkenal sebagai teorema Euclides. Teorema 5.7 (Teorema Euclides) Banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga. Pada pembuktian teorema Euclides tersebut yang menarik adalah pembentukan bilangan bulat positif sebagai hasilkali semua bilangan prima ditambah 1. Apakah tersebut suatu bilangan prima? Misalkan kita memulai untuk bilangan prima pertama yaitu 2, maka kita memperoleh: Coba tunjukkan bahwa Selanjutnya tentukanlah bilangan prima! , , , , , dan tersebut masing-masing adalah prima. , dan . Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan ini bukan Suatu pertanyaan yang jawabannya belum diketahui, apakah ada tak berhingga sedemikian suatu bilangan prima pula. Demikian pula, apakah tak berhingga bilangan komposit ? Perhatikan barisan bilangan prima 2,3,5,7,..., . adalah bilangan prima ke- . Sekarang kita ingin menentukan suatu batas atas dari barisan bilangan prima tersebut. Pada pembuktian Teorema Euclides di atas dapat diambil kesimpulan bahwa: Sebagai contoh, jika , maka ketidaksamaan itu menjdai Ketidaksamaan ini menujukkan bahwa bilangan prima ke-4 kurang dari 126. Tampak bahwa pendekatan ini masih sangat kasar. Pendekatan yang lebih halus diberikan pada teorema berikut ini. Teorema 5.8: Dalam suatu barisan bilangan prima, jika menyatakan bilangan prima ke- . maka : Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematik pada . Untuk diperoleh yaitu . Hal ini memang benar, sebab bilangan prima pertama adalah 2. Selanjutnya sebagai hipotesis, teorema diasumsikan benar untuk , yaitu: Harus dibuktikan bahwa teorema benar untuk , yaitu . Perhatikan bahwa: Mudah ditunjukkan bahwa .... dengan suatu deret geometri dengan rasio 2, sehingga diperoleh: Yaitu sudah deret geometri dengan rasio 2, sehingga diperoleh: ( ) Karena untuk setiap bilangan asli , maka ketidaksamaan itu menjadi Karena teorema benar untuk dan benar untuk dan telah ditunjukkan benar untuk , maka teorema benar untuk setiap bilangan asli . Memperhatikan teorema ini, maka bilangan rima ke ( ) , yaitu , sehingga benyaknya bilangan prima yang lebih kecil dari tidak kurang dari ( ) buah. Jadi, untuk , maka ada paling sedikiti n+1 buah bilangan prima yang lebih kecil dari . G. KEGIATAN BELAJAR 7 G.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 7 Bahan kajian : definisi dan sifat kekongruenan Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep definisi dan sifat kekongruenan. Indikator pembelajaran : ? mahasiswa mampu merumuskan definisi dan sifat kekongruenan. ? mahasiswa mampu mengaplikasikan definisi dan sifat kekongruenan untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, relasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, dan faktorisasi bilangan tunggal. G.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 8 A. Definisi dan Sifat Kekongruenan Pada bab sebelumnya kita telah membahas konsep keterbagian beserta sifat-

sifatnya. Konsep dan sifat-sifat keterbagian itu dapat dipelajari lebih mendalam lagi dengan menggunakan konsep kekongruenan. Memang kekongruenan merupakan cara lain untuk menelaah keterbagian dalam himpunan bilangan bulat. Definisi 8.1:

Jika suatu bilangan bulat positif, maka kongruen dengan modulo m (ditulis ≡ (mod)) bila membagi (−). Jika m tidak membagi (−) maka dikatakan bahwa tidak kongruen dengan modulo (ditulis ≢ (mod)). Contoh 8. 1 : 25 ≡ 1 (mod 4), sebab 4

4 membagi (habis) 25 − 1. 31 ≢ 5 (mod 6), sebab 4 membagi (habis) 31 − 5. Definisi 8.1 tersebut dapat ditulis bahwa jika > 0 maka | (−) bila dan haya bila ≡ (mod). Jika | (−), maka ada bilangan bulat sehingga (−) = . Sehingga ≡ (mod) bila dan hanya bila − =

untuk suatu bilangan bulat . Tetapi karena − = sama artinya dengan = + , maka ≡ (mod 54

) bila dan hanya bila = + . Contoh 8.2:

26 ≡ 4 (mod 11) sama artinya dengan 26 = 11 . 2 + 4. 38 = 3 (mod 5) sama artinya dengan 38 = 5 . 7 + 3 29

. Uraian tersebut merupakan bukti dari teorema berikut ini: Teorema 8.1: ≡ (

mod) bila dan hanya bila ada bilangan bulat sehingga = + . Kita telah mempelajari bahwa jika a dan m bilangan-bilangan 3 bulat dan > 0, menurut algoritma pembagian, maka dapat dinyatakan sebagai : = + r dengan 0 ≤ < . Ini berarti bahwa − = , yaitu ≡ (mod). Karena

0 ≤ < ,

maka ada buah pilihan untuk , yaitu 0, 1, 2, 3 , . . . , (− 1). Jadi setiap bilangan bulat akan kongruen modulo dengan tepat satu 2 diantara 0, 1, 2, 3 , . . . , (− 1). Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini. Teorema 8. 2: Setiap bilangan bulat kongruen modulo dengan tepat satu diantara 0, 1, 2, 3 , . . . , (− 1). Definisi 8. 2: Jika ≡ (mod) dengan 0 ≤ < , maka disebut residu terkecil dari . Untuk kekongruenan modulo

ini, {0, 1, 2, 3, . . . , (− 1)} disebut himpunan residu

terkecil modulo . Contoh 8. 3: Residu terkecil dari 71 modulo 2 adalah 1 , karena sisa 71 : 2 adalah 1. Residu terkecil dari 71 2 modulo 3 adalah 2 , karena sisa 71 : 3 adalah 2. Residu terkecil dari − 53 modulo 10 adalah

7, sebab sisa -

53 : 10 adalah 7. (ingat bahwa residu terkecil dari suatu bilangan diambil bilangan bulat positif). Residu terkecil dari 34 modulo 5 4 adalah 4, sebab sisa

34 : 5 adalah 4 . Walupun 34 ≡ 9 (mod 5), tetapi 9 bukan residu terkecil dari 34 (mod 5), sebab 9 bukan sisa dari 34 : 5. Contoh 8.4: 4 Himpunan residu terkecil modulo 5 adalah {0, 1, 2, 3, 4}. Himpunan residu terkecil modulo 9 adalah {0, 1, 2, 3

,

4, 5, 6, 7, 8}. Himpunan residu terkecil modulo 25 adalah {0, 1, 2, 3, . . . , 24 2

}.

Kita dapat melihat relasi kekongruenan itu dengan cara lain, seperti pada teorema berikut ini. Teorema 8. 3 : ≡ (mod) bila dan hanya bila dan memiliki sisa yang sama jika dibagi . Bukti: Pertama dibuktikan jika ≡ (mod) maka dan memiliki sisa yang sama jika dibagi . Karena ≡ (mod) maka ≡ (mod) dan ≡ (mod) dengan adalah residu terkecil modulo atau 0 ≤ < . Selanjutnya , ≡ (mod) berarti = + untuk suatu bilangan bulat , dan ≡ (mod) berarti = + untuk suatu bilangan bulat . Jadi, dan memiliki sisa yang sama jika dibagi . Kedua , buktikan jika dan memiliki sisa yang sama jika dibagi , maka ≡ (mod). Misalkan memiliki sisa jika dibagi , berarti jika dibagi , berarti = + . = + dan memiliki sisa Dari kedua persamaan itu diperoleh bahwa: − = (−) berarti |(−) atau 8

≡ (mod)

Menurut -teorema terdahulu, ungkapan-ungkapan berikut mempunyai arti yang sama 4

yaitute:orema “ n ≡ 7 (mod 8)” “n = 7 + 8k untuk suatu bilangan bulat k”, dan “n dibagi 8 bersisa 7” Definisi 8.3: Himpunan bilangan bulat { 1, 2, 3, . . . , } disebut sistem

residu lengkap modulo m , bia setiap elemennya kongruen modulo m dengan satu dan hanya satu dari 0, 1, 2, ..., (m − 1). Contoh 8.5: (i) Himpunan {45, -9, 12, -22, 24} adalah suatu sistem residu lenngkap modulo 5. Dapat diperiksa bahwa 45 ≡ 0 (mod 5) -9 ≡ 1 (mod 5) 12 ≡ 2 (mod 5) -22 ≡ 3 (mod 5) 24 ≡ 4 (mod 5) (ii) Himpunan {0, 1, 2, 3, 4 } juga merupakan suatu sistem residu lengkap modulo 5, sekaligus sebagai himpunan residu terkecil modulo 5 . (iii) Himpunan {4, 3 , 1, 2, 0 } pun merupakan suatu sistem residu lengkap modulo 5 . (iv) Himpunan {5, 11, 6, 1, 8, 15} bukan merupakan sistem residu lengkap modulo 6, sebab 5 ≡ 11 (mod 6) yang dua-duanya berada dalam himpunan tersebut 4

.

Kekongruenan modulo suatu bilangan bulat positif adalah suatu relasi antara bilangan- bilangan bulat 54

.

Dapat ditunjukkan bahwa relasi kekongruenan itu merupakan relasi ekuivlensi. Kita ingat bahwa suatu relasi disebut relasi ekuivalensi jika relasi itu memiliki sifat refleksi, sifat simetris dan sifat transitif. Jika , , , dan adalah bilangan-bilangan bulat dengan positif, maka: (i) Jika ≡ (mod), sifat refleksi. (ii) Jika ≡ (mod) maka ≡ (mod), sifat simetris. (iii) Jika ≡ (mod) dan ≡ (mod) maka ≡ (mod) sifat transitif 3

. Kita buktikan tiap-tiap sifat itu! (i) Karena − = 0 = 0 ,

maka ≡ (mod). (ii) Karena ≡ (mod) maka − = untuk suatu bilangan bulat , sehingga (iii) − ≡ = − yang berarti bahwa (mod) berarti − = ≡ (mod 3

).

untuk suatu bilangan bulat · ≡ (mod m) berarti − = h untuk suatu bilangan bulat h. Ruas-ruas kedua **persamaan dijumlahkan, sehingga diperoleh − = (− h) yang berarti bahwa ≡ mod . Karena relasi "≡" (kekongruenan) pada himpunan bilangan bulat memenuhi tiga sifat tersebut, maka relasi kekongruenan pada himpunan tersebut merupakan relasi** 29

ekivalen. Akibatnya himpunan bilangan **bulat terpartisi dalam** himpunn-himpunan **bagian** yang **setiap** himpunan **bagian disebut kelas. Contoh** 87

8.6:

Misalnya kita memperhatikan himpunan bilangan bulat dengan relasi kekongruenan modulo 5, **maka dengan relasi ini himpunan bilangan bulat terpartisi (terbagi menjadi himpunan bagian – himpunan bagian yang saling asing dan gabungannya sama dengan himpunan bilangan bulat) menjadi** 5 **kelas, yaitu** 8

: 0 = [0] = { . . . , -10, -5, 0, 5, 10, . . .} 1 = [1] = { . . . , -9, -4, 1, 6, 11, . . . } 2 = [2] = { . . . , -8, -3, 2, 7, 12, . . . } 3 = [3] = { . . . , -7, -2, 3, 8, 13, . . . } 4 = [4] = { . . . , -6, -1, 4, 9, 14, . . . } Pemberian nama untuk suatu kelas menggunakan nama salah satu anggota dari kelas tersebut yang dibubuhi tanda garis diatasnya atau dikurung persegi. Misalnya: [3] = [-2] = [8] atau 3 = 2 = 8 Relasi kekongruenan mempunyai kemiripan sifat dengan sifat persamaan, sebab relasi kekongruenan dapat dinyatakan sebagai persamaan, yaitu ≡ ( ) sama artinya dengan = + , untuk suatu bilangan . Misalnya: (

1) jika ≡ (mod) **maka** + ≡ + (mod) **untuk setiap bilangan bulat . (2) Jika** ≡ (mod) **maka** 15

≡ (mod) untuk setiap bilangan bulat . Coba buktikan kedua sifat tersebut! Kemiripan itu akan tampak pula pada teorema berikut ini. Teorema 8.4: Jika ≡ (mod) dan ≡ (mod) maka + = + . Bukti: ≡ (

mod) berarti = + untuk suatu bilangan bulat . ≡ (mod) berarti = + untuk suatu bilangan bulat 3

. Dua pasangan ini akan bahwa: memberi+kan = (+) + (+) + = (+)+(+) (+)−(+)= (+) Ini berarti + ≡ + (mod). Lebih umum teorema 8.4 dinyatakan sebagai teorema berikut ini. Teorema 8.5: Jika ≡ (mod) dan ≡ (mod) maka + ≡ + (mod), untuk setiap bilangan bulat dan . Bukti: ≡ (mod) berarti = + untuk suatu bilangan bulat . ≡ (mod) berarti = +

untuk suatu bilangan bulat . Jika kedua ruas persamaan pertama dikalikan dan kedua ruas persamaan kedua dikalikan diperoleh: = + dan = + Dengan menjumlahkan ruas persamaan ini diperoleh 30

+ + = (= (+ +)+( )+(+ +)) (+)−(+) = ( ) Persamaan terakhir ini berarti bahwa: | [(+) − (+)] atau + ≡ + ( ) Pada persamaan/kesamaan bilangan-bilangan bulat berlaku sifat kanselasi (penghapusan) sebagai berikut: jika = dengan ≠ 0 maka = .

Apakah dalam kekongruenan **berlaku sifat yang mirip dengan sifat kanselasi tersebut? Misalkan, jika** ≡ (mod) **dengan** 23

≢ 0 (mod), apakah ≡ (mod)? Ambil sebuah contoh: 24 ≡ 12 (mod 4) adalah suatu pernyataan yang benar (mengapa?). 2.12 ≡ 2.6 (mod 4) dan jels bahwa 2 ≢ 0 (mod 4). Apakah 12 ≡ 6 (mod 4)? Jelas tidak! (mengapa?) Tetapi jika 3.8 ≡ 3.4 (mod 4) maka 8 ≡ 4 (mod 4) adalah suatu pernyataan yang benar.Walaupun sifat kaselasi tidak berlaku sepenuhnya pada relasi kekongruenan, tetapi akan berlaku dengan suatu syarat seperti dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 8.6 Jika ≡ (mod) dengan (,) = 1, maka ≡ (mod). Bukti: ≡ (mod) berarti |(−) atau |(−). | (−) dengan (,) = 1, maka |(−) berarti ≡ (mod). Contoh 8.7: Tentukanlah bilangan-bilangan bulat yang memenuhi perkongruenan 3 ≡

1 (mod 7). Jawab : Karena **1 ≡ 15 (mod 7), maka kita dapat mengganti 1 pada perkongruenan tersebut dengan 15, sehingga diperoleh** 13

3 ≡

15 (mod 7). Selanjutnya, karena (**3, 7) = 1** , maka kita dapat **membagi 3 pada ruas-ruas perkongruenan** itu, **sehingga diperoleh** ≡ 5 (**mod 7**). Perkongruenan terakhir ini **berarti** 13

= 5 + 7 untuk setiap bilangan bulat . atau dapat dikatakan bahwa himpunan penyelesaian dari perkongruenan tersebut adalah {5 + 7 | bilangan bulat}. Kita dapat menghapus (melenyapkan) suatu faktor dari suatu kekongruenan, jika faktor tersebut dan bilangan modulonya saling prima. Tetapi, jika faktor adan modulonya tidak saling prima, maka kita harus mengganti bilangan modulonya seperti tampak dalam teorema berikut ini. Teorema 8.7: Jika ≡ (mod) dengan (,) = , maka ≡ (mod). Bukti: ≡ (mod) berarti |(−) atau | (−)

maka (a − b). Karena adalah FPB dari dan , maka dan adalah bilangan-bilangan bulat. Karena (,) = maka , = 1. Karena , = 1 dan | (a − b) berarti ≡ (mod 30

). Contoh 8.8: Tentukan yang memenuhi 2 ≡ 4 (mod 6). Jawab: 2 ≡ 2.2 (modulo 6) karena (2, 6) = 2, maka ≡ 2 (mod 3). Jadi nilai-nilai adalah (3 + 2) untuk setiap bilangan bulat . atau dapat dikatakan bahwa himpunan penyelesaian dari perkongruenan itu adalah {3 + 2| bilangan bulat}. B. Aplikasi Kekongruenan Pada sub bab sebelum ini telah kita pelajari pengertian relasi kekongruenan beserta sifat- sifatnya. Pada sub bab ini kita akan mempelajari penggunaan pengertian dan sifat-sifat kekongruenan itu. Kekongruenan modulo 9 dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran perkalian dan penjumlahan bilangan-bilangan bulat. Kita mengetahui bahwa: 10.000 − 1 = 9.999 = 9 sehingga 10.000 ≡ 1 (1.000 − 1 = 999 = 9 sehingga 1.000 ≡ 1 (9) 9) 100 − 1 = 99 = 9 sehingga 100 ≡ 1 (10 − 1 = 9 = 9 sehingga 10 ≡ 1 (9) 9) Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa

setiap bilangan bulat kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya. Contoh 59

8.9 8.234 ≡ 8000 + 200 + 30 + 4(mod 9) ≡ 8(1000) + 2(100) + 3(10) + 4(

mod 9) ≡ 8 (1) + 2 (1) + 3(1) + 4 (mod 9) 8.234 ≡ 17 (**mod 9**) Selanjutnya **dengan cara yang sama: 17 ≡ 10 + 7 (mod 9) ≡ 1 + 7** (mod **9**) 17 ≡ 8 (**mod 9**) Jadi **8.234 ≡ 8 (mod 9** 43

) Uraian dan contoh di atas secara umum dinyatakan sebagai teorema-teorema berikut ini. Teorema 8.8: 10n ≡ 1 (mod 9) untuk n = 0, 1, 2, 3,. . . Bukti : 10n ≡ 1 = 999. . .9 (n angka semuannya 9) terbagi oleh 9 Jadi 10n ≡ 1 (mod 9) Teorema 8.9

Setiap bilangan bulat kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya 59

. Bukti : Ambil sembarangan bilangan bulat n yang angka-angkanya secara berturut-turut adalah: n = dk dk-1dk-2. . .d2 d1 d0 atau n = dk 10k + dk-1 10k-1 + dk-2 10k-2 + . . .+ d2 102 + d1 10+ d0 dengan 0≤ di ≤ 9 untuk i = 0, 1, 2, . . . , k dan dk ≠ 0. Menurut Teorema 5.8 10n ≡ 1 (mod 9) untuk n = 0, 1, 2, 3, . . .sehingga n ≡ dk (1) + dk-1 (1) + dk-2 (1) + . . .+ d2 (1) d1 (1) + d0 (mod 9) n ≡ dk + dk-1 + dk-2 + . . .+d2 + d1 + d0 (mod 9) Jadi bilangan bulat n kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya. Perhatikan sekarang,

misalkan a + b = c maka tentulah **a + b ≡ c** (mod 9). Jika **a** ≡ m (mod 9), **b** 61

≡ n (mod 9), dan c ≡ p (mod 9), maka dari a + b ≡ c (mod 9) dapat disimulkan bahwa m + n ≡ p (mod 9). Prinsip tersebut dapat digunakan untuk memriksa kebenaran suatu penjumlahan maupun pengurangan bilangan-bilangan bulat. Contoh 8.10 Periksalah kebenaran penjumlahan berikut ini dengan prinsip di atas: 248 + 324 + 672 = 1.244 Jawab: 248 ≡

2 + 4 +8 (**mod 9**) ≡ 14 (**mod 9**) ≡10+4(**mod 9**) ≡ 1 + **4** (mod9) ≡ 5 (**mod 9** 40

) 324 ≡ 3 + 2 + 4 (

mod 9) ≡ 9 (**mod 9**) ≡ 0 (**mod 9**) 672 ≡ 6 + 7 + **2 (mod 9**) ≡ 15 (**mod 9**) ≡ 6 (**mod 9** 40

) Jadi 248 + 324 + 672 ≡ 5 + 0 + 6 (

mod 9) ≡ 11 (mod 9) ≡10+ **1 (mod 9) ≡ 1** + 1 (**mod 9** 85

) ≡2(mod9) ....(i) Sedangkan 1.244 ≡ 1 + 2 + 4 + 4 (mod 9) ≡ 11 (mod 9) ≡2(mod9) ....(ii) Dari kekongruenan (i) dan (ii) berarti : 248 + 324 + 672 = 1244 ((benar)

Jika a ≡ b (mod m) dan c ≡ d (mod m), maka ac ≡ bd (mod m) prinsip ini **dapat** 67

digunakan untuk memeriksan kebenaran suatu perkalian. Contoh 5.11 Berikut 84 428 = 35.952? Jawab : 84 ≡ 8 +

4 (mod 9) ⇔ **8** + 4 (**mod 9**) ≡ 12 (**mod 9**) ⇔ 12 (**mod 9**) ≡ 3 (**mod 9** 73

) 428 ≡ 4 + 2 + 8 (mod 9) ≡ 14 (mod 9) ≡ 5 (mod 9) Maka 84 x 428 ≡ 3 x 5 (mod 9) ≡ 15 (mod 9) ≡6(mod9) ....(i) Sedangkan 35.952 ≡ 3 + 5 + 9 + 5 + 2 (mod 9) ⇔3 + 5 + 9 + 5 + 2 ≡ 24(mod 9) ⇔24 ≡ 20 + 4(mod 9) ⇔24≡ 2(10) + 4(mod 9) ⇔ 2(10) + 4 ≡ 2(1) + 4 (

mod 9) ⇔ **2** (1) + **4 ≡ 2** + 4 (**mod 9**) ⇔ 2 + 4 ≡ 6 (**mod 9**) ⇔24 ≡ 6 (**mod 9** 40

) . . . . . . (ii) Dari (i) dan (ii) bahwa 84 x 428 = 35.952 (benar) Coba buatlah cdoinstiomh-pcuolnktaonh pengurangan dan pembagian bilangan-bilangan bulat dan periksalah kebenaranya deunngtaunkkekongruenan modulo 9. Perlu dicatat bahwa pemeriksaan kebenaran penjumlahan, pembagian, pengurangan, perkalian dan pembagian dengan kekongruenan modulo 9 ini belum menjamin bahwa operasi yang kita lakukan itu benar atau salah. Tetapi cara ini kita lakukan, setelah kita mengerjakan operasi hitung tersebut dalam mengoperasikan kita keliru menjumlah puluhannya, ratusannya atau lainnya.mDuennggkainn kata lain koreksi 9 tersebut bukan merupakan syarat cukup, tetapi hanya merupakan syarat perlu untuk kebenaran hasil operasi. Contoh 8.12: 10 + 11 = 30 Kita mengetahui bahwa 10 + 11 ≡ 3 (mod 9) dan 30 ≡ 3 (mod 9) Menurut cara pemeriksaan di atas 10 + 11 = 30, benar. Tetapi kita mengetahui bahwa 10 + 11 = 30, salah

Selain itu, kekongruenan modulo 9 dapat digunakan untuk menguji keterbagian suatu bilangan bulat oleh 9 22

.

Suatu bilangan terbagi oleh 9 bila **dan hanya** bila **sisa pembagian itu nol** 22

. ≡ (9)

jika dan hanya jika dan masing-masing mempunyai **sisa yang sama jika dibagi** 30

9. Jadi, jika n ≡ a (mod 9) maka n

terbagi oleh 9, bila dan hanya bila a **terbagi oleh 9** 9

. Padahal

n kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya. Jadi suatu bilangan terbagi oleh 9 bila **dan hanya** bila **jumlah angka-angkanya terbagi oleh 9** 22

. Contoh 8.13 (i) 7.587 ≡ 7 + 5 + 8 + 7 ≡ 27 ≡ 9 (mod 9) 7.587 ≡ 9 (mod 9) Karena 9 | 9 maka 9 | 7587 (ii) 47.623 ≡ 4 + 7 + 6 + 2 + 3 ≡ 22 ≡ 4 (mod 9) Karena 9 ∤ 4 maka 9 ∤ 47.623 Apakah suatu bilangan yang terbagi oleh 9 akan terbagi pula

oleh 3? Misalkan 9 | n dan 3 | 9 dengan sifat transitif diperoleh 22

jumlah angka-angkanya terbagi oleh oleh 9, maka n terbagi oleh 3 bila

dan hanya bila **jumlah angka-angkanya terbagi oleh** 3. **Suatu bilangan terbagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya terbagi oleh 3** 32

. Contoh 8.14 (1) 12.456 ≡ 1 + 2 + 4 + 5 + 6 ≡ 18 ≡ 9 (mod 9) Karena 3 | 9 maka 3 | 12.456. (2) 42.641 ≡ 4 + 2 + 6 + 4 + 1 ≡ 17 ≡ 8 (mod 9) Karena 3 ∤ 8 maka 3 ∤ 42.641. Bagaimana menguji suatu bilangan terbagi oleh 2, dan 4 dan oleh 8?. Anda pasti setuju, bahwa suatu bilangan terbagi oleh 2, bilangan-bilangan itu genap. Coba buktikan pernyataan itu dengan menggunakan kekongruenan mod 2? Ambil n, yaitu bilangan yang dinyatakan oleh n = ak ak-1 ak-2 . . . a1 a0 dengan 0 ≤ ai ≤ 9 untuk i = 0, 1, 2, ...

n = ak 10k + ak-1 10k-1 ak -1 **10k-2 + . . .+ a1 10 + a0** 36

Terlihat bahwa suku-suku ruas kanan pada persamaan ini terbagi oleh 2, kecuali a0. Apabila n terbagi oleh 2, maka a0 pun terbagi oleh 2. a0adalah angka terahir dari bilangan n.

Jadi suatu bilangan terbagi oleh 2 bila **dan hanya** bila **angka** terahirnya **terbagi oleh 2** 22

. Apakah 102. 103, 104,. . .masing-masing terbagi oleh 4? Jelas terbagi oleh 4 bukan! (mengapa?) nah, bagaimana menguji suatu bilangan terbagi oleh 4. Misalkan n = ak ak-1 ak-2. . . a1 a0 atau

n = ak 10k + ak-1 10k-1 ak-2 10k-2 + . . . + a2 100 + (**a1 10 + a0**	36

) Setiap suku pada ruas kanan pada persamaan itu, kecuali dua suku terahir, yaitu a1 10 dan a0, terbagi oleh 4. Jadi, n terbagi oleh 4 bila dan hanya bila (a1 10 + a0) terbagi oleh 4. Uraian itu dapat disimpulkan sebagai berikut:

Suatu bilangan terbagi oleh 4 bila dan hanya bila bilangan **yang dinyatakan oleh dua angka** terahir **dari bilangan** itu **terbagi oleh 4**	9

. Contoh 8.15: 5.134.216 terbagi oleh 4, sebab 16 (dua angka terahir) terbagi oleh 4. Dengan cara yang mirip dengan keterbagian oleh 4, turunkanlah suatu aturan keterbagian suatu bilangan oleh

8. Suatu bilangan terbagi oleh 8 bila dan hanya bila bilangan yang dinyatakan oleh tiga angka terair **dari bilangan itu terbagi oleh 8**	9

. Contoh 8.16: 17.256 terbagi oleh 8, sebab 256 (tiga angka terahir) terbagi oleh 8. Nah, sekarang, bagaimana menguji suatu bilangan terbagi oleh 6? Apabila 2 | n dan 3 | n dan karena (2, 3) = 1, maka 6 | n. Buktikanlah pernyataan itu! Pernyataan itu dapat dikatakan sebagai berikut.

Suatu bilangan terbagi oleh 6 bila dan hanya bila bilangan itu terbagi oleh 2 dan terbagi pula oleh 3	9

. Selanjutnya dengan mudah pembaca membuktikan bahwa

suatu bilangan terbagi oleh 5 bila dan hanya bila angka terahir itu **adalah 5** atu **0**	9

. Begitu juga pembaca mudah membuktikan bahwa

suatu bilangan terbagi oleh 10 bila dan hanya bila angka terahir **itu adalah 0**	9

. Berikut ini dipelajari keterbagian suatu bilangan oleh 11.

10 ≡ -1 (mod 11) 100 ≡ 10.10 = (-1)(-1) ≡ 1 (mod 11) 1000 ≡ 10. **10.10 ≡ (-1)(-1)(-1) ≡ -1 (mod 11**	41

) dan seterusnya. Sehingga pada umumnya 10n ≡ (-1)n (mod 11) Apabila n = ak ak-1 ak-2 . . . a1 a0, dengan 0 ≤ ai ≤ 9 dan ak ≠ 0, maka ≡

ak 10k + ak-1 10k-1 + ak-2 10k-2 + . . . + a2 100 + **a1 10 + a0** (mod 11) ≡ **ak** (-1)k + **ak-1** (-1)k- **1 + ak-2** (-1)k- **2 + . . .+ a2** (-1)2 + **a1** (-1) + **a0 (mod 11**	45

) ≡

ak (-1)k + **ak-1(-1**)k-1 + **ak-2 (-1**)k-2 + . . .+ **a2 − a1 + a0 (mod**	36

11) ≡ ((a0 + a2 + a4 + . . .) − (a1 + a3 + a5 + . . .)) (mod 11) a1, a3, a5, . . . berturut-turut adalah ke 2, ke 4, ke 6,. . . pada bilangan n dari belakang dan a0, a2, a4, . . . berturut-turut adalah angka ke 1, ke 3, ke 5, . . . pada bilangan n dari belakang. Jadi

jika n = ak ak-1 ak-2 . . . a1 a0, maka n terbagi oleh 11 bila dan hanya bila ((a0 + a2 + a4 + . .) − (a1 + a3 + a5 + . . .)) terbagi oleh 11 9

. Contoh 8.17 : (1) 180.829 terbagi oleh 11, karena (9 + 8 + 8) − (2 + 0 + 1) = 22 terbagi oleh 11. (2) 29.183 terbagi oleh 11, karena (3 + 1 + 2) − (8 + 9) = -11 terbagi oleh 11. Selain penggunaan di atas, kekongruenan dapat digunakan untuk masalah-masalah seperti berikut ini. (1) Tentukan sisa, jika 2050 dibagi 7? 20 ≡ -1 (mod 7) 2050 ≡ (-1)50 (mod 7) 2050 ≡ 1 (mod 7) Jadi 2050 : 7 bersisa 1 (2) Misalkan satu tahun 360, sekarang hari selasa, seribu hari lagi jatuh pada hari apa? Coba selesaikan dengan kekongruenan modulo 7. G.4. Latihan Kegiatan Belajar 8 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1. Tunjukkan bahwa jika a ada sebuah

bilangan bulat genap, maka ≡ 0(4), dan **jika adalah** sebuah **bilangan bulat ganjil, maka** 50

≡ 1(4) ! 2. Tunjukkan bahwa jika adalah sebuah bilangan bulat ganjil, maka ≡ 1(8) ! 3. Tunjukkan bahwa jika maka = , , dan adalah bilangan bulat dengan 90 dan ≡ (!), 4. Tunjukkan bahwa jika > 0, | , dan ≡ (, , dan adalah bilangan bulat sedemikian sehingga), maka ≡ ( ) ! > 0, 5. Tunjukkan bahwa jika , , , dan adalah bilangan bulat sedemikian sehingga > 0, dan ≡ ( ), maka ≡ ( ) ! > 0, 6. Show that jika , , dan adalah bilangan bulat dengan > 0 sedemikian sehingga ≡ ( ), maka (,) = (,) ! I. KEGIATAN BELAJAR 8 I.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 8 Bahan kajian : perkongruenan linier Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep perkongruenan linier dan sistem perkongruenan linier. Indikator pembelajaran : ? mahasiswa mampu merumuskan dan mengamplikasikn konsep perkongreunan linier untuk menyelesaikan masalah. ? mahasiswa mampu merumuskan dan mengamplikasikan konsep sism teperkongreunan linier untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, relasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, dan faktorisasi bilangan tunggal. I.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 9 A. Perkongruenan Linier Setelah kita mempelajari pengertian relasi kekongruenan, sifat-sifat dan kegunaannya. Berikut ini akan di pelajari pengkongruenan linier. Kalimat terbuka yang menggunakan relasi kekongruenan disebut perkongruenan. Misalnya: 3 ≡ 4(5) + 3 − 3 ≡ 0(31) Jika suatu pengkongruenan,

variabelnya berpangkat paling tinggi satu disebut pengkongruenan linier. **Bentuk umum perkongruenan linier adalah** : ≡ ( ), dengan 13
≢0 (**mod m**

). Perhatikan perkongruenan linier 3 ≡ 4(

5). Apabila diganti 3 memberikan 3 · 3 ≡ 4 (5) **atau 9 ≡ 4** (5). **Yaitu suatu kalimat kekongruenan yang benar. Begitu pula** jika 10
diganti berturut-turut oleh . . . −7, −2, 8, 13, . .. akan memberikan kalimat -kalimat **kekongruenan yang benar**

. (coba periksalah!) Kita telah mengerti bahwa ≡ ( ) berarti − = atau = + , untuk suatu bilangan bulat . Jadi perkongruenan linier ≡ ( )

akan mempunyai solusi (penyelesaian) bila dan hanya bila ada bilangan -bilangan **bulat dan yang memenuhi persamaan. ax − = .** 11
Misalkan memenuhi perkongruenan linier

≡ ( ), berarti ≡ ( ). Maka setiap bilangan bulat (+), (+ 2), (+ 3), . . . (−), (− 2), (− 3),. . . memenuhi perkongruenan itu, sebab (+) ≡ ≡ ( ),

untuk setiap bilangan bulat . **Diantara bilangan-bilangan bulat (r + km), dengan k = 1, 2, 3, 4, . . . −1, −2, −3, . .. ada tepat satu dan** 10
hanya satu, katakan dengan 0 ≤ ≤ , sebab suatu bilangan bulat mesti terletak di antara dua kelipatan yang berurutan. **Jadi, jika** memenuhi **perkongruenan**

≡ ( ) dan ≤ ≤ (+ 1) untuk suatu bilangan bulat , maka 0 ≤ (−) < . Jadi = −

untuk suatu bilangan bulat . Dengan kata lain, adalah residu terkecil modulo m yang memenuhi perkongruenan 11

≡ ( ). Selanjutannya s disebut solusi (penyelesaian) dari perkongruenan itu. Contoh 9.1: Nilai-nilai yang memenuhi perkongruenan 2 ≡ 4 (

7) adalah . . . -19, -12, -5, 2, 9, 16, . . . Solusi dari perkongruenan itu adalah 2, yaitu residu terkecil modulo 7 yang memenuhi perkongruenan linier 10

2 ≡ 4 (7). Pada persamaan ≡ , dengan ≠ 0 hanya mempunyai satu solusi, tetapi pada perkongruenan linier ≡ ( ) dapat mempunyai tepat satu solusi, banyak solusi, bahkan bisa tidak mempunyai solusi. Pada contoh di atas 2 ≡ 4 (7) mempunyai tepat satu solusi, yaitu 2. Perkongruenan linier 2 ≡ 1 (4) tidak mempunyai solusi, sebab 4 ∤ (2 + 1), yaitu tak ada bilangan bulat sedemikian 2 − 1 terbagi oleh 4 (mengapa?). Sedangkan perkongruenan linier 2 ≡ 4 (6) mempunyai dua solusi, yaitu 2 dan 5. (coba periksa kebenaranya!). selanjutnya, akan kita pelajari cara menguji suatu perkongruenan linier mempunyai solusi atau tidak. Teorema 9.1: Jika (,) maka perkongruenan linier ≡ ( ) tidak memiliki solusi. Bukti : Kita buktikan kontraposisi dari teorema itu,

yaitu jika ≡ ( ) memiliki solusi **maka (,) | . Misalkan adalah** solusi **dari ≡ ( ) maka ≡ ( ) sehingga − = untuk suatu bilangan bulat .** 5 **Perhatikan − = , karena (,)| dan (,)| , maka** (,)| . Terbuktilah **kontraposisi** dari **teorema** itu, **sehingga terbukti pula teorema itu. Contoh**

9.2: 6 ≡ 7(8),

karena (6, 2) = 2 dan 2 ∤ 7 maka perkongruenan linier 10

6 ≡ 7 (8) tidak mempunyai solusi. Teorema 9.2: Jika (,) = 1, maka perkongruenan linier ≡ ( ) memiliki tepat satu solusi.

Bukti : Karena (,) = 1 **maka ada bilangan bulat dan sehingga** + = 1. **Jika kedua ruas dari persamaan ini** dikaitkan , **diperoleh : (** 5 **) + ( ) ( ) + ( ) = ( ) − = − ( ) Persamaan** terahir **ini berarti bahwa** ( )− Jadi ( ) ≡ ( ) **adalah kelipatan . Maka residu terkecil dari** rb **modulo** m **adalah** solusi **dari** perkogruenan **linier itu. Selanjutnya tinggal menunjukkan bahwa** solusi **itu tunggal**

andalkan solusi perkongruenan

linier itu tidak **tunggal, misalkan dan masing-masing** solusi **dari ≡ ( ), maka ≡ ( ) dan ≡ (dengan sifat** transituf di peroleh : 5 **Karena** (,) = 1, **maka ≡ ( ), =). Ini berarti |(−). ( ). Tetapi karena dan adalah** solusi **dari** perkongruenan **itu, maka dan masing-masing residu terkecil modulo** m, **sehingga** 0 ≤ < dan 0 ≤ < . **Dari kedua** ketidaksamaan **ini diperoleh bahwa − < − < , tetapi karena |(−) maka** − = 0 **atau = Ini berarti bahwa** solusi **dari** perkoruenan **linier tunggal (terbukti). Salah satu** cara **menyelesaikan** perkongruenan **linier adalah memanipulasi** koefisienatau **konstanta pada** perkongruenan **itu, sehingga memungkinkan** kita **untuk melakukan kanselasi (penghapusan). Contoh** 9.3: (1) **Selesaikan** 4 ≡ 1 (15) **Jawab**

: 4 ≡ 1 (15) 4 ≡ 16 (15) ≡ 4 (15) Karena (4, 15) = 1 maka memungkinkan kita melakukan kanselasi 4 pada perkongruenan 4 ≡ 16(4 ≡ 1 (15) sehingga di peroleh ≡ 4 (15) adalah 4. 15). Solusi dari perkongruenan (2) Selesaikan 14 ≡ 27(31) Jawab : 14 ≡ 27 (31) ⟺ 14 ≡ 58 (31) ⟺ 7 ≡ 29 (31) ⟺ 7 ≡ 91 (31) ⟺ ≡ 13 (31) Karena 27 ≡ 58 (31) maka 14 ≡ 58 (31). Karena (2, 31) = 1, kita dapat menghapus 2 pada perkongruenan 14 ≡ 58(31) dan di peroleh 7 ≡ 29(31). Selanjutnya 7 ≡ 91(31), sebab 29 ≡ 91(31) ≡ 13(31), sebab (7, 31) = 1 Jadi, 13 adalah solusi 4 ≡ 24(31). Sesuai teorema 5.11 di atas, jika (,) = 1, maka perkongruenan ≡ 1( ) mempunyai tepat satu solusi pula. Solusi perkongruenan itu disebut invers dari a modulo m yang diberi simbol . Contoh 9.4: Carilah 2 (31). Jawab : Untuk mencari 2 (31), kita perlu menyelesaikan perkongruenan 2 ≡ 1 (31). 2 ≡ 1 (31) 2 ≡ 14 (31) ≡ 7 (31) Jadi 2 (31) adalah 7. Periksalah bahwa 3-1 (mod 31) adalah 9, 4-1(mod 31) adalah 10, 5-1(mod 31) adalah 8, 6- 1(mod 31) adalah 11, dan 12-1(mod 31) adalah 12. Berikut ini akan dipelajari banyaknya solusi dari ax ≡ b (mod m), apabila (a, m) = d dan d | b dengan d > 1. Teorema 9.3: Jika (,) = dan | maka perkongruenan linier = ( ) memiliki tepat solusi. Bukti : Kita harus membuktikan bahwa perkongruenan linier ≡ ( ) memiliki solusi. Dan seterusnya harus ditunjukkan bahwa tak ada solusi lain kecuali solusi itu. Sekarang akan dibuktikan bahwa perkongruenan linier itu memiliki solusi. (,) = berarti ada ' dan " sehingga = ' dan = '. | berarti ada ' sehingga = '. Sehingga dari ≡ ( ) memberikan ' ≡ '(' ≡ '('). ') atau Dari (,) = memberikan (', ') = atau (', ') = 1 Menurut Teorema 9.1, jika (', ') = 1, maka ' ≡ '(') memiliki satu solusi. Misalkan solusi itu , maka buah bilangan, yaitu , + ', + 2 ', . . . + (− 1) ' atau + ' untuk = 0, 1, 2, . . . , (− 1) memenuhi perkongruenan ≡ ( ). Hal ini ditunjukkan sebagai berikut. Pertama, setiap + ' dengan = 0, 1, 2, . . . , (− 1) memenuhi perkongruenan Karena ' ≡ ' (≡ ( ) = (+) = ' (+ ') = ') dan ' = , maka ' + ' ' ≡ ' ≡ ' ≡ ' ≡ (+ + (' ') ' ( ) ' ( )) (mengapa?) = ' Jadi + ' untuk = 0, 1, 2, . . . (− 1) memenuhi perkongruenan ≡ ( ). Kedua, setiap + ' dengan = 0, 1, 2, . . (− 1) adalah residu terkecil modulo . Ditunjukkan sebagai berikut : adalah solusi dari ' + ' ≤ + (+ (− 1) ' < ≡ ' (') berarti − 1) ' untuk setiap ' + (− 1) ' = ≥ 0 sehingga 0 ≤ = 0, 1, 2, . . . (− 1). ' = '. + ' Jadi, 0 ≤ + ' < Hal ini menunjukkan bahwa terkecil modulo . + ' untuk = 0, 1, 2, . . . (− 1) adalah residu-residu Ketiga, tak ada dua bilangan dari + ' untuk = 0, 1, 2, . . . (− 1) yang kongruen modulo yang berbeda. Sampai disini telah ditunjukkan bahwa perkongruenan linier ≡ ( ) memiliki buah solusi. Nah, sekarang tinggal menunjukkan bahwa tak ada solusi lain, kecuali d buah solusi itu. Tadi diambil bahwa adalah solusi dari perkongruenan linier ≡ ( ). Misalkan adalah solusi lain, maka ≡ (Jadi, ≡ ≡ (Karena (,) = dan ≡ ( ). ≡ ( )) dan ≡ ( ) di peroleh bahwa). ≡ (') karena = ' Ini berarti s − r = tm' atau s = r + tm' untuk suatu bilangan bulat t. Karena s adalah residu terkecil modulo m, sedangkan semua residu terkecil modulo m berbentuk r + km' dengan = 0, 1, 2, . . . (− 1). Maka = + ' adalah salah satu di antara + '. Jadi tak ada solusi lain, kecuali buah solusi, yaitu + ' dengan = 0, 1, 2, . . (− 1). Lengkaplah bukti teorema itu. Contoh 9.5: Selesaikan 6 ≡ 15 (33) Jawab : Karena (6, 33) = 3, maka perkongruenan ini memiliki 3 solusi. 6 ≡ 15 (mod 33) 2 ≡ 5 (11) 2 ≡ 16 (11) mengapa ? ≡ 8 (11) Maka bilangan-bilangan bulat positif yang memenuhi ≡ 8(11) dan merupakan residu terkecil modulo 33 adalah 8, 19 dan 30. Jadi solusi-solusi dari 6 ≡ 15 (33) adalah 8, 19 dan 30. Kita telah mengenal fungsi linier + = dengan dan menyatakan bilangan- bilangan rill. Dengan kata lain, fungsi linier itu diselesaikan dalam domain (himpunan semesta) himpunan bilangan rill. Apabila domainnya di persempit, yaitu himpunan bilangan bulat, maka persamaan + = dengan , , dan bilangan-blangan bulat disebut Persamaan Linier Diophantus. Persamaan + = berarti ≡ ( ). Dapat pula bahwa + = berarti ≡ ( ). Oleh karena itu, untuk menyelesaikan persamaan + = dengan , , , dan bilangan-bilangan bulat, kita dapat menyelesaikan salah satu perkongruenan. ax ≡ ( ) ≡ ( ). Selanjutnya solusi dari salah satu perkongruenan itu disubstitusikan pada persamaan semula untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan linier tersebut. Contoh 9.6: Misalkan kita harus menyelesaikan 9 + 16 = 35. 9 + 16 = 35 7 ≡ 35 (16 ≡ 35 (9) 9) ≡ 5 (9) Berarti = 5 + 9 untuk suatu bilangan bulat . Nilai ini disubtitusikan pada 9 + 16 = 35 memberikan 9 + 16 (5 + 9) = 35 ⟺ 9 + 144 = −45 ⟺ + 16 = −5 ⟺ = −5 − 16 Sehingga himpunan penyelesaian dari 9 + 16 = 35 adalah {(,)| = −5 − 16 , = 5 + 9 dan bilangan bulat} Jika = 0, maka = −5, = 5, sehingga (−5, 5) adalah salah satu penyelesaian dari persamaan 9 + 16 = 35. Penyelesaian itu, secara umum dapat dikatakan bahwa apabila (,) adalah salah satu solusi dari persamaan linier Diophantus + = , maka solusi-solusi lainnya adalah (+ , −) untuk setiap bilangan bulat . Coba buktikanlah pernyataan itu! Apakah setiap persamaan linier Diophantus + = mesti memiliki solusi? Ingat bahwa + = sama artinya dengan ≡ ( ) atau ≡ ( ). Kedua pengkongruenan ini akan mempunyai solusi, jika (,)| , dan perkongruenan itu tidak mempunyai solusi apabila (,) ∤ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa: (1) Persamaan Linier Diophantus + = dengan ≠ 0 tidak mempunyai penyelesaian, jika (,) ∤ . (2)Persamaan Linier Diophantus + = dengan 0 mempunyai penyelesaian, jika (,)| . Coba buktikan kedua kesimpulan tersebut! Contoh 9.7: Persamaan Linier Diophantus 2 + 4 = 5 tidak mempunyai solusi, karena (2, 4)∤5. Mudah pula diperiksa bahwa jika = , maka = 5 − 4t 2 Untuk setiap bilangan bulat maka (5 − 4) adalah suatu bilangan ganjil (Mengapa?). Sehingga = tidak akan menyatakan bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat . Contoh 9.8: Jika dan menyatakan bilangan-bilangan bulat positif, selesaikanlah 7 + 15 = 51. Jawab: 7 + 15 = 51 berarti 15 ≡ 51 (7) 5 ≡ 17 (7) 5 ≡ 10 (7) ≡ 2 (7) Jadi = 2 + 7 dengan bilangan cacah (Mengapa bilangan cacah?) Subtitusikan nilai pada persamaan semula, sehingga diperoleh 7 + 15 (2 + 7) = 51 7 + 105 = 21 = 3 − 15 Karena bilangan bulat positif dan bilangan cacah, maka = 3, yaitu untuk = 0, sehingga = 2. Jadi bilangan-bilangan bulat positif dan yang memenuhi 7 + 15 = 51 berturut-turut adalah 3 dan 2. Contoh 9.9: Selesaikan persamaan linier Diophantus 2 + 6 = 20 ! Jawab: 2 + 6 = 20 berarti 2 ≡ 20(6) ≡ 10(3) ≡ 1(3) Berarti = 1 + 3 dengan bilangan bulat. Subtitusi 1 + 3 pada dalam 2 + 6 = 20. 2(1 + 3)6 = 20 6 = 18 − 6 = 6 − . Himpunan penyelesaian dari 2 + 6 = 20 adalah {(,)| = −1 + 3 , = 6 − , bilangan bulat} Apakah = 10 + 3 dan = − , dengan suatu bilangan bulat juga merupakan penyelesaian dari persamaan itu? Bandingkan hasil penyelesaian persamaan + 3 = 10 dengan himpunan penyelesaian dari 2 + 6 = 20,. Contoh ini secara umum dinyatakan dalam teorema berikut ini. Teorema 9.4: Persamaan Linier Diophantus

a' x + b' y = c ' yang diperoleh dari **ax + by = c** dengan **a' = a** : (a, **b**), dengan **b** ' = b : (a, b) **dan c' = c**

: (a, b) mempunyai suatu penyelesaian (solusi) x = r dan y = s, maka himpunan semua penyelesaian dari ax + by = c adalah {(x, y) | x = r + b't, y = s + a't, t bilangan bulat}. Coba buktikan Teorema 9.4 ini sebagai latihan. Hal lain yang berhubungan dengan perkongruenan linier, salah satu diantaranya adalah sistem perkongruenan linier. Masalah yang penyelesaiannya menggunakan sistem perkongruenan ini telah muncul dalam suatu tulisan bangsa Cina kuno sebagai berikut: Tentukan suatu

bilangan bulat yang bersisa 2 jika dibagi 3, **bersisa** 4 **jika dibagi** 5, **dan bersisa** 6 **jika dibagi**

7. Jika bilangan bulat yang dicari dimisalkan x, maka kalimat dalam masalah itu dapat dinyatakan sebagai berikut: ≡ 2(3), ≡ 4(5), ≡ 6(7). Apakah bilangan bulatyang dicar itu adalah 104? Adakah bilangan lain yang masih memenuhi? Untuk menjawab pertanyaan ini, ikutilah uraian berikut ini: Dari perkongruenan pertama ≡ 2(3) berarti x = 2 + 3k1, untuk suatu bilangan bukat k1. Subtitusikan nilai x itu dalam perkongruenan keduan dan diperoleh 2 + 3k1 ≡ 4 (mod 5) 3k1 ≡ 2 (mod 5) K1 ≡ 4 (mod 5) Mengapa? Ini berarti k1 = 4 + 5k2 untuk suatu bilangan bulat k2. Subtitusikan nilai k1 ini dalam persamaan x = 2 + 3k1 sehingga diperoleh: = 2 + 3 (4 + 5 2) = 14 + 15 2. Subtitusikan nilai ini dalam perkongruenan ketiga dan diperoleh: 14 + 15 2 ≡ 6 (7) 15 2 ≡ −8 (7) 2 ≡ −1 (7) 2 ≡ 6 (7) Hal ini berarti = 6 + 7 untuk suatu bilangan bulat t. Subtitusikan nilai ini dalam persamaan = 14 + 15 dan diperoleh: x = 14 + 15(6 + 7t) x = 104 + 105t untuk suatu bilangan bulat t Persamaan terakhir ini dapat dinyatakan sebagai x ≡ 104 (mod 105) yang memenuhi ketiga perkongruenan diatas. Solusi perkongruenan x ≡ 104 (mod 105) adalah 104, yang merupakan solusi bersama dari tiga pengkongruenan (sistem perkongruenan) diatas. Cara menyelesaikan sistem perkongruenan linier di atas merupakan langkah-langkah pembuktian dari teorema berikut: Teorema 9.5 (Teorema Sisa): Sistem perkongruenan linier

x ≡ ai (mod mi), i = 1, 2, 3, . . ., k dengan (**mi, mj) = 1** untuk setiap **i ≠ j** 44

memiliki solusi bersama modulo m dan solusi bersama itu tunggal dengan m = m1 , m2, m3, . . . mk. Bukti: Pembuktian dengan induksi matematik untuk bilangan asli . Untuk k = 1 berarti x ≡ a1 (mod m1) jelas mempunyai solusi. Untuk k = 2 berarti

x ≡ a1 (mod m1) dan **x ≡ a2 (mod m2**) dengan (**m1 , m2) = 1** 56

, apakah mempunyai solusi bersama. x ≡ a1 (mod m1) berarti x = a1 + k1m1 untuk suatu bilangan bulat k1. Sehingga a1 + k1m1 ≡ a2 (mod m2) k1m1 ≡ a2 − a1 (mod m2) dengan k1 suatu variabel. Karena (m1 , m2) = 1 maka kekongruenan terakhir mempunyai solusi untuk k1 modulo m2, katakanlah t, maka k1 = t + k2m2 untuk suatu bilangan bulat k2 yang memenuhi perkongruenan terakhir itu. Jadi x = a1 + k1m1 = a1 + (t + k2m2)m1 x = (a1 + t m1) + k2m2m1 ini berarti x ≡ (a1 + t m1) (mod m1 m2). Perkongruenan ini memenuhi untuk 2 perkongruenan (untuk k = 2). Selanjutnya, sebagai hipotesis diambil bahwa sistem perkongruenan linier x ≡ ai (mod mi) mempunyai satu solusi bersama untuk i = 1, 2, 3, . . ., (r − 1). Misalkan solusi bersama itu s, maka x ≡ ai (mod mi), i = 1, 2, 3, . . ., (r − 1) dapat dinyatakan sebagai suatu perkongruenan, yaitu: x ≡ s (mod m1 m2 m3 . . . . mr-1) x ≡ ar (mod mr). Sistem perkongruenan dari dua perkongruenan ini mempunyai solusi bersama mod (m1 m2 m3 . . . . mr-1) karena (mr , m1 m2 m3 . . . . mr-1) = 1 sebab mi dan mj saling prima untuk i ≠ j. Nah! Terbuktilah bahwa

sistem perkongruenan x ≡ ai (mod mi) untuk **i = 1, 2, 3, . . ., k mempunyai solusi bersama modulo (m1 m2 m3** 26

. . . . mr). Selanjutnya tinggal membuktikan

bahwa solusi itu tunggal. Misalkan r dan s adalah solusi - solusi **bersama dari** sitem **tersebut, maka: r** ≡ ai (mod mi) **dan** 11

s ≡ ai (mod mi) sehingga (r − s) ≡ 0 (mod mi). Ini berarti bahwa mi | (

r − s) untuk setiap **i = 1, 2** , 3, ..., **k. Jadi (r − s) suatu** bilangan kelipatan **persekutuan dari** 11

m1 m2 m3 . . . . mk . karena (**mi , mj) = 1 untuk** setiap **i ≠ j, maka** 26

(m1 m2 m3 . . . . mk) | (r − s). Tetapi ingat bahwa r maupun s

adalah solusi-solusi perkongruenan, berarti r **dan** s **adalah residu** -residu **terkecil modulo (m1 m2 m3 . . . . mk) sehingga -** 26
(m1 m2 m3 . . . . mk) < r − s < (**m1 m2 m3 . . . . mk). Mengingat** r − s **adalah kelipatan** persekutuan **dari m1 m2 m3 . . . . mk**

dan $(m_i, m_j) = 1$ untuk setiap **$i \neq j$. Dapat disimpulkan** bahwa: $r - s =$ **0 atau** $r = s$. **Jadi solusi bersama dari** sitem **$x \equiv a_i \pmod{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ adalah tunggal**. Catatan: $(m_i, m_j) =$ **1**

untuk setiap $i \neq j$ dengan i ; j = 1, 2, 4, . . ., k, ddikatakan m1 m2 m3 . . . . mk saling prima dua-dua. Contoh 5.27: Tentukan solusi sistem perkongruenan

$x \equiv 2 \pmod{3}$ (i) **$x \equiv 3 \pmod{5}$ $x \equiv 1 \pmod{4}$** 77

) Sebelum menyelesaikan contoh tersebut, ditulis suatu teorema yang memudahkan kita dalam menyelesaikan sistem perkongruenan, yaitu: misalkan sistem (i)

$x \equiv a_i \pmod{m_i}$ untuk **$i = 1, 2, 3, \ldots, k$** dengan (**$m_i, m_j) = 1$, j** 44

= 1, 2, 3, . . ., k ;

i = 1, 2, 3, . . ., k dan Mi = (**m1 m2** m3 . . . . **mk) : mi**, untuk **i = 1, 2, 3, . . ., k dan si adalah solusi** Mi **x ≡ 1 (mod mi), i = 1, 2, 3, . . ., k. Maka s** 11

= a1 s1 M1 + a2 s2 M2 + . . . + ak sk Mk memenuhi sistem (i). Sehingga solusi bersama dari sistem (i) adalah solusi dari x ≡ s (mod m1 m2 m3 . . . . mk). Pada contoh soal a1 = m1 diatas 2 = 3 a2 = m2 3 = 5 a3 = m3 1 = 4 M1 = 5.4 = 20, sehi 20x ≡ 1 a ngg (mod 3) t a a x ≡ 2 (mod 3) M2 = 3.4 = 12, sehi ngg a 12x ≡ 1 (mod 5) M3 = 3.5 = 15, sehi 15x ≡ 1 ngg (mod 4) a u A t a u a t a u x ≡ 3 (mod 5) x ≡ 3 (mod 4) Maka s = a1 s1 M1 + a2 s2 M2 + a3 s3 M3 = 2.2.20 + 3.3.12 + 1.3.15 = 197 Maka sistem perkongruenan diatas dapat dinyatakan sebagai ≡ 197 (mod 3.5.4) ≡ 197 (mod 60) ≡ 17 (mod 60) H.4. Latihan Kegiatan Belajar 8 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1. Tentukan semua solusi dari setiap kekongruenan linear berikut! a. 2 ≡ 5(7) b. 3 ≡ 6(9) 2. Tentukan semua solusi dari setiap kekongruenan linear berikut! a. 17 ≡ 14(21) b. 15 ≡ 9(25) J. KEGIATAN BELAJAR 9 J.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 9 Bahan kajian : teorema Fermat. Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep dari teorema Fermat. Indikator pembelajaran : mahasiswa mampu merumuskan dan mengamplikasikan konsep dari teoerma Fermat untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, elerelasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, faktorisasi bilangan tunggal, dan kekongruenan. J.2. Bahan Pembelajaran Kegiatan Belajar 9 A. Teorema Fermat Perhatikan barisan bilangan 4, 8, 12, 16, 20, 24 Bilangan-bilangan dalam barisan ini kongruen modulo 7 berturut-turut dengan 4, 1, 5, 2, 6, 3. Tampak pada barisan bilangan terakhir ini, suku-sukunya adalah bilangan-bilangan asli kurang dari 7, yaitu aitu unsur-unsur dari himpunan residu terkecil modulo 7. Coba, tentukan residu-residu terkecil modulo 8 dari bilangan–bilangan dalam barisan: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Residu-residu terkecil modulo 8 dari bilangan-bilangan dalam barisan itu berturut-turut adalah 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5. Tampak pula bahwa residu-residu terkecil dari bilangan-bilangan dalam barisan tadi adalah semua bilangan asli kurang dari 8. Residu-residu terkecil mod 9 dari bilangan-bilangan dalam barisan: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 Berturut-turut adalah 3, 6, 0, 3, 6, 0, 3, 6. Tampak di sini bahwa residu-residu terkecilnya ternyata tidak memuat semua bilangan asli yang kurang dari 9. Contoh-contoh tersebut merupakan suatu ilustrasi dari teorema berikut ini: Teorema 10.1: Jika (,) = 1, maka residu-residu terkecil modulo dari barisan: , 2 , 3 , . . . , (− 1)

adalah suatu permutasi dari 1, 2, 3 , . . . , (− 1). **Dengan perkataan lain, teorema** 6.1 **dapat dikatakan bahwa jika** 1

(,) =

1, maka setiap **bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu dari 0** 1

, , 2 , 3 , . . . , (− 1) . Ingat bahwa setiap bilangan bulat akan kongruen modulo m dengan tepat satu dari 0, 1, 2, 3 2

, 4, . . . , (− 1). Bukti teorema 6.1: Perhatikan barisan bilangan: , 2 , 3 , . . . , (− 1) . . . . (1) Bilangan-

bilangan pada barisan ini tidak ada satupun yang kongruen modulo m dengan 0 (nol). Mengapa? Selanjutnya, kita harus membuktikan bahwa bilangan -bilangan (suku-suku) dalam barisan (1) masing-masing kongruen modulo m dengan tepat satu dari 1,2,3 , . . . , (− 1). Andaikan ada dua suku dari barisan (1) yang kongruen modulo , misalnya: = (mod) dengan 1 ≤ r < s < m . Karena (,) = 1, maka kita dapat 1

melenyapkan dari kekongruenan itu, sehingga diperoleh = ( )

Tetapi, karena ra dan sa adalah suku-suku dari barisan (1), maka r dan s adalah residu-residu terkecil modulo , sehingga = . Hal ini 1 kontradiksi dengan pengandaian bahwa 1 ≤ < , maka pengandaian tersebut tidak benar. Jadi tidak ada dua suku dari barisan (1) yang kongruen modulo m. Ini berarti bahwa suku- suku dalam barisan (1) masing -asing kongruen modulo m dengan tepat satu dari 1,2,3

, . . . , (− 1). Perhatikan barisan bilangan: 4, 8, 12, 16, 20, 24. Residu-residu terkecil mod 7 dari masing-mmasing suku dari barisan ini adalah: 4 ≡ 4 (7) 8 ≡ 1(7) 12 ≡ 5(7) 16 ≡ 2(7) 20 ≡ 6(7) 24 ≡ 3(7) Tampak pada enam kekongruenan tersebut bahwa residu-residu terkecil modulo 7 dari suku- suku pada barisan: 4, 8, 12, 16, 20, 24 adalah suatu perutasi dari 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jika semua bilangan pada ruas kiri dari 6 kekongruenan ini dikalikan, maka hasilnya akan kongruen mod 7 dengan hasil kali semua bilangan pada ruas kanannya, yaitu: 4.8.12.16.20.24 ≡ 3.1.5.2.6.3 (7) 4 (1.2.3.4.5.6) ≡ 1.2.3.4.5.6(mod 7) ⇔ 4 . 6! ≡ 6! (mod 7) ⇔ 4 ≡ 1(mod 7) Dengan cara seperti itu, cobalah tunjukkan bahwa: a) 5 ≡ 1(mod 7) b) 3 ≡ 1(mod 11) c) 4 ≡ 1(mod 13) d) 8 ≡ 1(mod 5) e) 13 ≡ 1(mod 17) Contoh-contoh tersebut merupakan penerapan dari teorema fermat berikut ini: Teorema 10.2: (Teorema Fermat) Jika suatu bilangan prima dan (,) = 1, maka ≡

1(mod p) Bukti: Ambil sembarang bilangan prima p dan bilangan bulat a sedemikian 13

(,) = 1, maka menurut Teorema 6.1, residu-residu terkecil mod p dari a, , 2 , 3 , … , (− 1)

adalah suatu permutasi dari 1, 2, 3 , . . . , (− 1), **sehingga hasil kali-hasil kalinya akan kongruen mod juga, yaitu** 13

: , 2 , 3 , … , (− 1) ≡ 1 · 2 · 3 … , (− 1)( ) (1 · 2 · 3 … , (− 1)) ≡ (− 1)! ((− 1)! ≡ (− 1)! ( )) Karena dan (− 1)! Saling rima (mengapa?), maka kita dapat melenyapkan (p-1)! Dari kekongruenan terakhir ini, sehingga diperoleh ≡ 1( ). Contoh 10.1: Tunjukkan bahwa jika (3,7) = 1, maka 3 ≡ 1(7) ! Jawab: Menurut teorema Fermat, Diketahui = 7 and = 3. Sehingga, 1 · 3 ≡ 3(7), 2 · 3 ≡ 3(7), 3 · 3 ≡ 3(7), 4 · 3 ≡ 3(7), 5 · 3 ≡ 3(7), dan 6 · 3 ≡ 4(7). Akibatnya (1·3)·(2·3)·(3·3)·(4·3)·(5·3)·(6·3) ≡ 3·6·2·5·1·4(7) 3 ·1·2·3·4·5·6 ≡ 3·6·2·5·1·4(7) 3 · 6! ≡ 6! (7) ⇔ 3 ≡ 1(7) ⇔ 3 ≡ 1(7) (terbukti) Teorema Fermat tersebut dapat dinyatakan lebih umum dengan meniadakan ketentuan (,) = 1 sebagai berikut: Teorema 10.3: Jika suatu bilangan prima, maka ≡ ( ), untuk setiap

bilangan bulat . Bukti: Ambil sembarang bilangan prima dan sembarang bilat a, maka 1

(,) = 1 atau (,) = . Apakah ada kemungkinan lain antara FPB dari a dan p? Jika (,) = 1, maka menurut teorema 10.2 diperoleh bahwa maka diperoleh ≡ ( ). ≡ 1( ). Selanjutnya, jika kedua ruas dikalikan , Jika (,) = , maka | , sehingga ≡ 0(Jadi, ≡ ( )) dan ≡ ( ) pula. Bukti lain dari teorema 6.3 dengan menggunakan induksi matematiak pada . Jika = 1, maka pernyataan 1 ≡ 1( ) jelas benar. Demikian pula, jika diambil = 0. Selanjutnya diasumsikan ≡ ( )

benar untuk suatu bilangan bulat positif a , dan **harus ditunjukkan** benar **untuk** (+ 1), yaitu (+ **1** 1

) = + 1( ). Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Menurut teorema binomial, maka : Ingat bahwa (+ 1) = = !(+ ! 1) = (+ 1 + ⋯ + + ⋯ + − 1 + 1)( )…( ) · · … , karena suatu bilangan prima, maka | berarti ≡ 0( ) untuk 1 ≤ ≤ − 1. Jadi kita memperoleh bahwa: (+ 1) = + 0 + 0 + ⋯ + 0 + 1( ) Karena ≡ ((+ 1) = + 1( ), maka (+ 1) = + 1( )) Dengan induksi matematik pada kita telah membuktikan bahwa ≡ ( ) untuk setia bilangan asli .

Selanjutnya jika a suatu bilangan bulat negatif, bukan lagi menjadi persoalan, sebab untuk setiap **bilangan bulat negatif a berlaku bahwa** 1

≡ ( ) dengan 0 ≤ < − 1. Jadi, ≡ ≡ ≡ ( ).

Teorema Fermat mempunyai banyak kegunaan, khususnya dalam mengembangkan Teori Bilangan 1

. Contoh 10.2: Berapakah sisa pembagaian 5 oleh 11? Jawab: Menurut teorema Fermat 5 ≡ 1(11), maka 5 ≡ 5 · ≡ (5) (5) ≡ 81 ≡ 4(11). Jadi, 5 : 11 bersisa 4. Bacalah lagi dengan seksama teorema 6.3 tersebut.

Kontraposisi dari teorema itu **benar** pula, **yaitu: Jika untuk suatu bilangan bulat a** 1

, ≢ ( ) . Hal ini menunjukkan bahwa teorema

fermat dapat digunakan untuk menguji apakah suatu bilangan bulat merupakan bilangan komposit atau bukan. **Contoh** 10.3: **Apakah 117 suatu bilangan prima** 1

? Jawab: Untuk memeriksa ini dipilih bilangan bulat positif yang cukup kecil, misalnya 2. Selanjutnya diperiksa apakah 2 ≡ 2(117)? 2 = 2 . = (2) . 2 2 = 128 ≡ 11(2 ≡ (11) . 2 (≡ (121) . 2 (117), 117) 117) ≡ 4 . 2 (117) ≡ 2 (117) ≡ (2) (117) ≡ 11 (117) ≡ 121.11(117) ≡ 4.11(117) ≡ 44(117) Sehingga diperoleh bahwa 2 ≡ 44 ≠ 2 (117) Hal ini berarti bahwa 117 adalah bilangan komposit dan kenyataan bahwa 117 = 13. 9 Contoh 10.4: Tanpa menggunakan teorema fermat, tunjukkan bahwa 3 ≡ 1(17). Jawab: 3 ≡ 27 ≡ 10(17) dikuadratkan 3 ≡ 100 ≡ (17) 3 ≡ 100 ≡ (17) 3 ≡ −2 ≡ (17) dikuadratkan 3 ≡ 4(17) Sehingga 3 ≡ 3 . 3 . 3 ≡ 4.10.3(17) 120 ≡ 1(Jadi, 3 ≡ 1(17) 17) Perhatikan kembali teorema fermat di atas. Perlu ditekankan di sini bahwa konvers dari teorema tersebut tidak benar, yaitu: Jika ≡ 1( )

untuk suatu bilangan bulat , maka tidak perlu suatu bilangan prima 1

. Untuk menunjukkan contohnya, terlebih dahulu kita bicarakan teorema berikut ini yang merupakan akibat dari teorema fermat. Teorema 10.4 Jika dan adalah bilangan-bilangan prima yang berlainan sedemikian hingga ≡ ( )dan ≡ ( ), maka ≡ ( ). Bukti: Menurut teorema 6.3, karena suatu bilangan prima maka ini berarti bahwa p ( ) ≡ (mod). selanjutnya, karena diketahui bahwa ≡ ( ). Ini berarti bahwa |(−)................... (1). Menurut Teorema 6.3 lagi, karena suatu bilangan prima maka ( ) ≡ ( ). Selanjutnya, karena diketahui bahwa ≡ ( ). Ini berarti bahwa |(−)........................ (2) Dari (1) dan (2) disimpulkan bahwa |(− 1) dan dapat dinyatakan sebagai ≡( ) Contoh 10.5: Tunjukkan bahwa 2 ≡ 1(341) Jawab: 341 = 11 · 31 ⟺ 2 = 1.024 = 31 · 33 + 1, sehingga 2 = 1(31) 2 ≡ 2(31) 2 = 1.024 = 31 · 33 + 1, sehingga 2 ≡ 1(11), jika kedua ruas dibagi dua, maka diperoleh 2 ≡ 2(11), maka 2 · ≡ 2(11 · 31), yaitu : 2 ≡ 2(341) Jika kedua ruas dibagi dua, maka diperoleh 2 ≡ 2(341) dan tidak dapat disimpulkan bahwa 341 sutu bilangan prima. Contoh 10.6: Tentukan solusi dari 7 ≡ 12(17) dengan menggunakan teorema Fermat! Jawab: Dengan menggunakan teorema fermat, = 7; = 17 Karena terdapat modulo 17 maka kita dapat memanfaatkan bentuk sehingga kita dapat mengalikan kedua sisi dengan 17 untuk memperoleh : 17 · 7x ≡ 17 · 12(7) ⟺ 17 ≡ 17 · 12(7) Karena 17 ≡ 1(17) memberikan 17 ≡ 17 · 12(7) ⟺ ≡ 17 · 12(17) ≡ 17 · 12(17) ≡ (17) · 12(17) ≡ (343) · 12(17) ≡ (3) · 12(17) ≡ 243 · 12(17) ≡ 5 · 12(17) ≡ 60(17) ≡ 9(17) Sehingga diperoleh ≡ 9(17) ≡ 9(7) ⟺ = 17 + 9 { ∈ ℕ} Nilai-nilai yang memenuhi : =⋯ = −3 : = 17 + 9 = 17(−3) + 9 = −51 + 9 = −42 = −2 : = 17 + 9 = 17(−2) + 9 = −34 + 9 = −25 = −1 : = 17 + 9 = 17(−1) + 9 =

−17 + 9 = −8 = 0 : = 17 + 9 = 17(0) + 9 = 9 = 1 : = 17 + 9 = 17(1) + 9 = 1 + 9 = 26 =2: = 17 + 9 = 17(2) + 9 = 34 + 9 = −43 =3: = 17 + 9 = 17(3) + 9 = 51 + 9 = 60 =⋯ Jadi, solusi dari 7 ≡ 12(17) adalah 9, yaitu residu terkecil modulo 7. Dalam sejarahnya, bilangan berbentuk 2 − 2 ditemukan oleh matematikawan Cina pada 25 abad yang lalu dana menyatakan bahwa suatu bilangan prima jika dan hanya jika |2 − 2 Dalam kenyataan, kriteria ini benar untuk semua bilangan prima < 340. Dan pada contoh di atas,

kita memperoleh fakta bahwa 341 |2 − **2, walaupun 341 bukan** bulangan **prima** . Selanjutnya **bilangan komposit** 1

sedemikian hingga |2 − 2 disebut bilangan prima semu (pseudoprima). Ada tak terhingga banyaknya

bilangan prima semu . Emat **bilangan prima semu** pertama **341, 561, 645, dan** 1

1.105. J.4. Latihan Kegiatan Belajar 9

Selesaikan soal-soal berikut ini **dengan benar! 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7** 72

. Hitunglah 6 (11) ! Hitunglah 5 (41) ! Tentukan sisa 2019 dibagi 7 ! Tunjukkan bahwa 31 membagi 8 − 1 ! Tentukan sisa dari 7 sehingga 5 membagi 7 ! Tentukan sisa dari 18! Sehingga 437 membagi 18! ! Tentukan bilangan prima terbesar yang dapat dinyatakan dalam bentuk + suatu bilangan prima dan ! + 3 untuk 8. Tentukan sisa pembagian dari (6 + 7 + 8 + 9) oleh 2017 ! 9. Tunjukkan bahwa jika p dan q adalah dua bilangan prima berbeda, maka + ≡

10. Tunjukkan bahwa **jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat, maka** 52

|((− 1)!) ! + 1( ) ! K. KEGIATAN BELAJAR 10 K.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 10 Bahan kajian : teroema Wilson Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep dari teorema limit. Indikator pembelajaran : mahasiswa mampu merumuskan dan mengamplikasikan konsep perkongreunan linier untuk menyelesaikan masalah Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, elerelasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, faktorisasi bilangan tunggal, kekongruenan, dan teroema Fermat. K.2. Bahan Pembelajaran 10 A. Teorema Wilson Teorema Fermat dikemukakan oleh Pierre de Fermat (bangsa Prancis) pada tahun 1640 yang merupakan teorema fundamental dalam mengembangkan Teori Bilangan pada saat itu. Teorema yang terkenal pula adalah Teorema Wilson, yang pertama kali dipublikasikan Edward Waring (1770) tanpa mencantumkan buktinya. Sebenarnya Wilson bukanlah orang pertama kali mengemukakan teoremanya, sebab pada tahun 1682 Leibniz juga telah membicarakannya. Bukti teorema Wilson pertama kali diberikan oleh Lagrange pada tahun 1771 dan menamakan teoremanya dengan sebutan "Teorema Wilson". Sebelum membicarakan Teorema Wilson akan kita pelajari lebih dahulu teorema-teorema berikut ini yang akan membantu untuk membuktikan Teorema Wilson. Teorema 11.1:

Jika suatu bilangan prima, maka kekongruenan ≡ **1( ) mempunyai tepat dua** solusi, **yaitu 1 dan** − 1. **Bukti: Misalkan adalah** 19
suatu solusi **dari** perkongruenan ≡ **1 ( ), maka**

− 1 ≡ 0 ( ) ⇔ (+ 1)(− 1) ≡ 0 ( ) Perkongruenan terakhir ini berarti | (+

1)(− 1), karena p suatu bilangan prima, maka : |(+ 1) atau |(− **1**) + 1 ≡ 0 ( ) **atau** 53

− 1 ≡ 0( ) ≡ − 1( ) atau ≡ 1( ) ≡ (− 1)( ) atau ≡ 1( ) Karena suatu solusi dari perkongruenan ≡ 1( ), maka adalah residu terkecil . Jadi 1 dan − 1 adalah solusi dari ≡ 1( ). Bukti lain yang lebih mudah, apabila (− 1) dan 1 masing-masing disubtitusi pada dalam perkongruenan ≡ 1( ). Coba lakukanlah! Selesaikan perkongruenan-perkongruenan berikut ini: (1) ≡ 1(7) (2) ≡ 24(23) Perhatikan himpunan residu-residu terkecil modulo 7 selain nol, yaitu = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Mudah anda peroleh solusi-solusi berikut ini: Solusi dari ≡ 1 (7) adalah 1 Solusi dari 2 ≡ 1 (7) adalah 4 Solusi dari 3 ≡ 1 (7) adalah 5 Solusi dari 4 ≡ 1 (7) adalah 2 Solusi dari 5 ≡ 1 (7) adalah 3 Solusi dari 6 ≡ 1 (7) adalah 6 Tampak dari perkongruenan-perkongruenan tersebut bahwa jika ∈ , maka solusi dari ≡ 1(

7) adalah ' ∈ pula. Dapat diperiksa pula bahwa apabila , ∈ dengan ≢(7) maka ' ≢'(7) dengan ', ' ∈ yang merupakan solusi berturut- turut dari ≡ 1(7) dan ≡ 1 (7). Jika = 1 dan = 6 maka solusi- solusinya berturut-turut adalah ' = 1 dan ' = 6. Hal ini merupakan penerapan dari teorema berikut: Teorema 11.2: Misalkan suatu bilangan prima selain 2 dan ' adalah solusi dari ≡ 1 ( ) dengan = 1, 2, 3, . . . , − 1 yaitu (' ≡ 1( ), dengan 0 < ' <), maka: (i) jika ≢( ) maka ' ≢'( ) (ii) jika = 1 atau = − 1 maka ' ≡ ( ) Bukti: Jika = 1, 2, 3, . .., atau − 1, maka (,) = 1, sehingga ≡ 1( ) mempunyai tepat satu solusi. Ini berarti ' ada, sedemikian hingga ' ≡ 1( ). Bagian (i) dibuktikan kontraposisinya, yaitu: Jika ' ≡ '( ), maka ≡ ( ). Misalkan ' ≡ '( ), maka aa' ≡ ' ≡ 1( ). Ingat bahwa ' dan ' adalah solusi dari ≡ 1( ). ' ≡ ' ≡ ( ) dengan = 1, 2, . . . , − 1. ( ), sebab ' ≡ 1( ). Jadi (i) terbukti. Bagian (ii) dibuktikan sebagai berikut: Jika = 1, yaitu ≡ 1( ), maka solusinya adalah ' = 1, sehingga ' ≡ ( ). Jika = − 1. Yaitu (− 1) ≡ 1( ) Jadi ' = − 1, sehingga ' ≡ (− ≡ 1(≡ −1 (≡ − 1 ( ).))) Contoh 11.1: 1(Pandang perkongruenan ≡ 1 (11) dan ' adalah solusinya, sehingga ' ≡). Maka hubungan , ' dan ' tampak pada tabel berikut ini. ' 1 1 2 6 3 4 4 3 5 9 6 2 7 8 8 7 9 5 10 10 ' 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 Hasil kali- hasilkali pasangan yang kongruen modulo 11 dapat dituliskan sebagai berikut: 2 · 6 ≡ 1 (11) 3 · 4 ≡ 1 (11) 5 · 9 ≡ 1 (11) 7 · 8 ≡ 1 (11)

Hasil kali semua bilangan pada ruas -ruas **kiri akan kongruen mod 11 dengan 1 pula, yaitu** 19

: 2 · 6 · 3 · 4 · 5 · 9 · 7 · 8 ≡ 1(11). Jika kedua ruas dikalikan 10, diperoleh: 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 ≡ 10(11) ⇔ 10! ≡ 10(11) ⇔ 10! ≡ −1(11) Coba tunjukkan bahwa 6! ≡ 6(7), 12! ≡ 12(18! ≡ 18(13), 19). Contoh tersebut merupakan suatu cara membuktikan Teorema Wilson berikut ini. Teorema 11.3 (Teorema Wilson): Jika suatu bilangan prima, maka (− 1)! ≡ −1 ( )! Bukti:

Menurut Teorema 5. **6, kita dapat memasangkan dan ' dari 2, 3, 4** 24

, . . . , (− 1) demikian sehingga ' ≡ 1( ). Dan terdapat (− 3) pasangan bilangan-bilangan tersebut yang kongruen mod dengan 1 jika ruas-ruas kiri dari (− 3) kekongruenan mod tersebut dikalikan, maka hasil kalinya akan kongruen mod dengan 1 pula, yaitu: 2 · 3 · 4 · 5 . . . (− 2) ≡ 1 ( ) ⇔ 1 · 2 · 3 · 4 . . . (− 2)(− 1) ≡ − 1 ( ) ⇔ (− 1)! ≡ −1( ). Sebagai contoh diambil = 13, maka kita dapat memasangkan dan ' dari 2, 3, 4, . . . , 11, sehingga terdapat 5 pasang bilangan-bilangan itu yang hasil kalinya kongruen mod 13 dengan 1, yaitu: 2 · 7 ≡ 1(13) 3 · 9 ≡ 1(13) 4 · 10 ≡ 1(13) 5 · 8 ≡ 1(13) 6 · 1 ≡ 1(13) Hasil kali ruas-ruas dari 5 kekongruenan ini adalah (2 · 7)(3 · 9)(4 · 10)(5 · 8)(6.11) ≡ 1(13) ⇔ 1.2.3.4.5. . . . 11.12 ≡ 12 (13) ⇔ 12! ≡ −1(13) Konvers dan Teorema Wilson juga benar, yaitu: Jika (− 1) ≡ −1( ), maka

suatu bilangan prima. Hal ini dibuktikan sebagai berikut: Andaikan positif dan **bukan bilangan prima, maka** 19

= ≠ 1 atau ≠ , sehingga | dan · ≤ dengan − 1. , bilangan-bilangan bulat Karena (− 1)! ≡ −1( ) maka |(− 1)! + 1. Dan karena | , maka |(− 1)! + 1. Karena ≤ − 1, maka merupakan salah satu faktor dari (− 1)!, sehingga |(− 1)!. Mengingat |(− 1)! + 1 dan |(− 1)!, maka |1. Diperoleh suatu kontradiksi, karena ≠

1, sehingga pengandaian tersebut **tidak benar. Jadi adalah suatu bilangan prima. Jika Teorema Wilson dan konversnya dituliskan bersama-sama, kita memperoleh bahwa** 19

:

Syarat perlu dan cukup agar p suatu bilangan prima adalah 19

(− 1)! ≡ −1( ). Atau dapat ditulis : p suatu bilangan prima bila dan hanya bila adalah (− 1)! ≡ −1 ( ). Berikut ini sebuah contoh penggunaan Teorema Wilson untuk menyelesaikan perkongruenan kuadrat seperti dalam teorema berikut ini. Teorma 11.4: Jika suatu bilangan prima ganjil, maka perkongruenan + 1 ≡ 0( ) mempunyai solusi bila dan hanya bila ≡ 1(4). Bukti: Misalkan adalah suatu solusi dari + 1 ≡ 0 ( ) maka ≡ −1( ) dan (,) = 1. Karena (,) = 1, menurut Teorema Fermat, maka ≡ 1( ) ( ) ( ) ≡ 1( ) (−1) ( ) ≡ 1( ) (−1) ≡ 1 ( ) Bilangan prima berbentuk 4 + 3 tampak tidak memenuhi, sebab akan didapat (−1)2 + 1 ≡ 1( ) −1 ≡ 1( ), yaitu |2 yang jelas salah. Jadi bilangan prima berbentuk 4 + 1, yaitu ≡ 1(4). Untuk sebaliknya dibuktikan sebagai berikut: Perhatikan bahwa − 1 ≡ −1( ) − 2 ≡ −2( ) . . . . = − (mod p) dan (− 1)! ≡ 1 · 2 · 3. . . . . (− 2)(− 1), maka (

p − 1)! ≡ 1 · 2 · 3 . . . (. (( )) . . . (−2)(−1)( )) (p − 1)! ≡ (−1) 1·2·3.... ( ) (p − 1)! ≡ 1.2.3 71

... . ( ), sebab = 4 + 1, untuk suatu bilangan bulat positif , sehingga (−1) = 1 (− 1)! ≡ ! ( ) Mengingat Teorema Wilson bahwa (− 1) ≡ −1 (−1 ≡ p − 1 2 ! ( ), maka:) Hal ini berarti ! memenuhi perkongruenan + 1 ≡ 0( ). Jadi, perkongruenan itu mempunyai solusi. Contoh 11.3: Selesaikan perkongruenan + 1 ≡ 0(13) ! Jawab: Karena 13 adalah bilangan prima berbentuk 4 +

1, maka perkongruenan tersebut mempunyai solusi, yaitu: ! = 6! = 720 ≡ (mod 13) Dapat diperiksa kebenarannya dengan subtitusi 5 pada dari perkongruenan tersebut, yaitu 52 + 1 = 26 ≡ 0 19

(13) K.4. Latihan Kegiatan Belajar 10 Selesaikan soal-soal berikut ini dengan benar! 1.

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku 4 + 10 + 16 86

+ ⋯ + (6 − 2) = (3 + 1) ! 2. Terkalah rumus umum untuk jumlahan dari n bilangan genap positif pertama. Berikanlah hasil terkaan itu dengan induksi matematik! 3. Buktikanah 1 · 2 + 2 · 3 + 3 · 4 + ⋯ + (+ 1) = (+ 1)(+ 2) untuk setiap bilangan asli . 4. Terkalah rumus untuk , jika = 1 1 0 1 . Buktikanlah hasil terkaan itu dengan menggunakan induksi matematik! 5. Buktikan 1 + 3 + 5 + ⋯ + (2 − 1) + (4 − 1) untuk setiap bilangan asli 6. Buktikan bahwa 1 + 2 + 3 + ⋯ + = (1 + 2 + 3 + ⋯ +) untuk setiap bilangan . 7. Buktikan bahwa a) > + 1, untuk setiap bilangan bulat ≥ 2. b) 2 > , untuk setiap bilangan bulat > 9. 8.

Buktikan bahwa − terbagi habis oleh 5 untuk setiap bilangan asli 7

berlaku ! K. KEGIATAN BELAJAR 11 K.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 11 Bahan kajian : fungsi Tu Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep fungsi Tu. Indikator pembelajaran : mahasiswa mampu merumuskan dan mengamplikasikan konsep fungsi Tu. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, elerelasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, faktorisasi bilangan tunggal, kekongruenan, teorema fermat, dan teorema wilson. K.2. Pendahuluan Kegiatan Belajar 11 A. Fungsi (tau)

Berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki bilangan-bilangan bulat dapat didefinisikan fungsi-fungsi khusus yang mepunyai peranan penting dalam Teori Bilangan. Fungsi-fungsi khusus tersebut sering diseut fungsi 37

artimatik didefinisikan/mempunyai daerah asal pada himpunan bilangan bulat positif seprti berikut ini. Jika f suatu fungsi, maka : →

dengan B adalah himpunan semua bilangan bulat dan adalah himpuanan semua bilangan bulat positif 37

. Definisi 11.1: Misalkan suatu bilangan bulat positif, ( ) menyatakan banyaknya pembagi bulat positif dari . Contoh 11.1: 1) Semua pembagi bulat positif

dari 12 adalah 1,2,3,4,5,6, dan 12, maka 32

(12) = 6. 2) Semua pembagi bulat positif dari 15 adalah 1,3,5, dan 15, maka (15) = 4. 3) Semua pembagi bulat positif dari 13 adalah 1 dan 13, maka (13) = 2. 4) Periksalah bahwa (1) = 1, (2) = 2, (3) = 2, (4) = 3, (5) = 2, (6) = 4, (8) = 4, 5) Jika suatu bilangan prima, maka ( ) = 2. ( ) yaitu banyaknya pembagi bulat positif dari , sering dinyatakan dengan rumus yang menggunakan notasi Σ (sigma). Berikut ini beberapa contoh ketentuan penggunaan notasi Σ. = + + + + = 2+3+4+5+6 3 = 3+3+3+3+3 ∑ | = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12, yaitu banyaknya pembagi bulat positif dari 12. ∑ | 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 yaitu banyaknya pembagi bulat positif dari 12. Memperhatikan contoh-contoh pemakaian notasi Σ tersebut, ( ) = 2 dapat dirumuskan sebagai berikut: ( ) = ∑ | 1 untuk bilangan bulat ≥ 1. Jadi, ( ) merupakan penjumlahan dari 1 sebanyak pembagi bulat positif dari . Contoh 11.2: 1) Semua pembagi bulat positif

dari 32 adalah 1,2,4,8,16, dan 32 51

, maka ∑ | 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6. 2) Semua pembagi bulat positif

dari 48 adalah 1,2,3,4,6,8,12,16,24, dan 48 51

, maka ∑ | 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10 3) Perksalah bahwa ∑ | 1 = 1, ∑ | 1 + 1 = 2, ∑ | 1 = 1 + 1 + 1 = 3, ∑ | 1 = 1 + 1 + 1 + +4 4) Jika suatu bilangan prima, maka ∑ | 1 = 1 + 1 = 2 Dari uraian dan contoh-contoh di atas dapat dipahami bahwa jika suatu bilangan prima, maka pembagi-pembagi bulat positifnya hanyalah 1 dan p saja, sehingga ( ) = 2. Pembagi-pembagi bulat positif dari adalah 1, p, dan sehingga ( ) = ∑ | 1 = 1 + 1 + 1 = 3. Periksalah bahwa ( ) = + 1 Contoh 11.3: 1) 64 = 2 , maka (2) = 6 + 1 = 7 Periksalah dengan mencacah semua pembagi bulat positif dari 64. 2) (3) = 5 + 1 = 6 3) Periksalah bahwa (32) = 6, (16) = 5, (125) = 4, dan (2401) = 5. Sekarang, jika dan adalah bilangan-bilangan prima yang berlainan dan = pembagi-pembagi bulat positif dari adalah 1, , , dan = sehingga ( ) = 4. , maka Jika = maka pembagi-pembagi bulat positif dapat disusun sebagai berikut: 1 = Tampak pada daftar ini bahwa ( ) = ( ) = 3 × 4 = 12. Contoh 11.4: 1) (144) = (2 , 3) = 5 × 3 = 15 2) (144) = (2 , 3) = 5 × 3 = 15 3) Periksalah bahwa (675) = 12, (784) = 15. Dapatkah anda membuktikan bahwa jika = dengan p dan q bilangan-bilangan prima yang berlainan dan , adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka: ( ) = ( ) = (+ 1)(+ 1) Bukti: Semua pembagi bulat positif dari = dapat disusun daftar sebagai berikut: 1, , , , ..., , , , , ..., , , , , ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ... , p , , , ..., = Tampak daftar tersebut bahwa: ( ) = ( ) = (+ 1)(+ 1) Kita telah mengetahui teorema dasar artimatika, yaitu bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat difaktorkan secara tunggal adat faktor-faktor prima. Misalnya: 72 = 2 · 3 300 = 2 · 3 · 5

Setiap bilangan bulat positif ≥ 1, maka **dapat ditulis dalam bentuk** kanonik sebagai: = . . . dengan **untuk** = 1, 2, … , adalah **bilangan** 93

-bilangan prima yang berlainan dan ≥ 1 untuk setiap = 1, 2, … , . Teorema 10.1: Jika bentuk kanonik dari bilangan positif adalah . . . , maka ( ) = (+ 1)(+ 1)(+ 1) … (+ 1) Bukti: Jika suatu pembagi bulat positif dari , maka berbentuk: = . . . dengan 0 ≤ ≤ Maka banyaknya pembagi bulat positif dari merupakan hasilkali banyaknya piliha yang mungkin untuk dari (+ 1) pilihan. Sehingga diperoleh ( ) = (+ 1)(+ 1)(+ 1) … (+ 1) Rumus ( ) tersebut sering dinyatakan dengan notasi ∏ (pi). Berikut ini diberikan contoh pemakaian notasi ∏. Contoh 10.6: 1) ∏ = · · · · 2) ∏ ( ) = (1) · (2) · (3) · (4) 3) ∏ (+ 1) = (+ 1)(+ 1)(+ 1) … (+ 1) Teorema 7. 1 di atas dapat dituliskan dengan notasi Π sebagai berikut: Jika = p p p ⋯ p = ∏ p , maka τ(n) = ∏ (a + 1) Contoh 10. 7: 1) 1260 = 2 · 3 · 5 · 7 , maka τ(1260) = τ(2 · 3 · 5 · 7) = (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36 2) 33.075 = 3 · 5 · 7 , maka τ(33.075) = τ(3 · 5 · 7) = (3 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 36 3) Periksalah bahwa τ(2310) = 10 , τ(210) = 8 , τ(1.156) = 9 Sekarang kita akan memperhatikan hasilkali pembagi-pembagi bulat positif dari suatu bilangan bulat positif . Contoh 10. 8: 1) Pembagi-pembagi bulat positif

dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6 dan 12 , τ(**12** 82

) = 6 Hasilkali semua pembagi bulat positif dari 12 ditulis dengan notasi K(12) maka: K(12) = 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 12 = (1 · 12)(2 · 6)(3 · 4) = 12 · 12 · 12 = (12) 2) Semua pembagi bulat positif

dari 28 adalah 1, 2, 4, 7, 14, dan 28 89

. τ(28) = 6 Hasilkali semua pembagi bulat positif dari 28 adalah : K(28) = 1 · 2 · 4 · 7 · 14 · 28 = (1 · 28)(2 · 14)(4 · 7) = 28 · 28 · 28 = (28) 3) Periksalah bahwa K(2) = 2, K(5) = 5, K(9) = 27, K(18) = 18 , K(24) = 24 , K(32) = 32 . 4) Jika p suatu bilangan prima, maka K(

p) = p, K(p) = p , K(**p) = p , K(p) = p** , dan ( ) K(**p) = p** 41

Teorema 10. 2: Jika

suatu bilangan bulat positif , maka hasilkali **semua pembagi bulat positif dari** adalah: K(**n) = n** 79

( ) Bukti: Misalkan d adalah suatu pembagi bulat positif dari n, maka ada d (yaitu pembagi komplemen dari n) sedemikian hingga dd = n. Hal ini mungkin saja terjadi bahwa d = d', yaitu jika n suatu kuadrat sempurna. Karena banyaknya pembagi bulat positif dari n adalah τ(n), dengan mengalikan setiap pembagi dari n (misalnya d) dengan pembagi komplemennya (misalkan d') sedemikian hingga dd = n, maka akan diperoleh bahwa hasilkali semua pembagi bulat positif dari n adalah: K(n) = n ( ) Notasi lain dari K(n) adalah ∏ | d K. KEGIATAN BELAJAR 12 K.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 12 Bahan kajian : fungsi mobius dan fungsi bilangan bulat diperbesar Capaian pembelajaran : mahasiswa menguasai pemahaman tentang konsep dari fungsi Mobius dan fungsi bilangan bulat diperbesar. Indikator pembelajaran : mahasiswa mampu merumuskan dan mengamplikasikan konsep fungsi Mobius dan fungsi bilangan bulat diperbesar untuk menyelesaikan masalah. Materi prasyarat : teori himpunan, sistem bilangan bulat, lerelasi keterbagian, faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil, basis bilangan bulat, bilangan prima, faktorisasi bilangan tunggal, teorema Fermat, dan teorema Wilson. K.1. Pendahuluan Kegiatan Belajar 12 A. Fungsi Mobius Sebelum mendefinisikan fungsi Mobius, terlebih dahulu didefinisikan bilangan bulat bebas kuadrat, yaitu bilangan bulat yang tidak mempunyai faktor suatu bilangan bulat sempurna yang lebih dari 1. Contoh 13.1: 1) 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21 dan sebagainya adalah bilangan-bilangan bebas kuadrat. 2) 4, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 27 dan sebagainya adalah bilangan-bilangan bulat tak bebas kuadrat. Definisi 13: Jika suatu bilangan bulat positif, maka: 1, jika = 1. ( )= 0, jika takbebas kuadrat. (−1) , jika bebas kuadrat Contoh 13.2: 1) (30) = (2 · 3 · 5) = (−3) = −1 2) (500) = (2 · 5) = 0 3) (2) = −1, (3) = −1, (5) = −1, (6) = 1 4) Jika suatu bilangan prima, maka (30) = −1 dan ( ) = 0, untuk ≥ 2. Fungsi Mobius ini merupakan fungsi ganda seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut ini: Teorema 13.1: Fungsi adalah suatu fungsi ganda Bukti: Kita akan memperlihatkan bahwa jika (m, n) = 1, maka μ(mn) = μ(m)μ(n). Jika suatu bilangan prima dan | atau | , maka | , sehingga ( ) = 0 = ( )(). Jika dan adalah bilangan-bilangan bebas kuadrat, misalnya = … dan = … dengan dan adalah bilangan-bilangan prima. Maka ( ) = (… …) = (−1) Jadi, adalah fungsi ganda. Perhatikan contoh berikut ini! Contoh 13.3: Semua

faktor bulat positif **dari** 12 **adalah 1, 2, 3, 4** , 5, 6, **12. Kita akan** 57

menghitung jumlah semua nilai fungsi untuk smua faktor dari 12, yaitu: ( ) = (1) + (2) + (3) + (6) + (12) | = (1) + (−1) + (−1) + 1 + 0 + 1 = 0 Misalkan suatu bilangan bulat > 1, dan didefinisikan bahwa: ()= () | Jika = dengan

p suatu bilangan prima dan k suatu bilangan bulat positif, maka 13

semua faktor bulat positif dari adalah 1, p, ,. . . , , sehingga : ( ) = ( ) = (1) + ( ) + ( )+. . . + ( ) | = 1 + (−1) + 0+ . . . +0 = 0 Mengingat bahwa suatu fungsi ganda dan memperlihatkan Teorema 13.1, maka merupakan fungsi ganda pula. Selanjutnya, jika bentuk kanonik dari adalah: = . . . , maka ( ) = . . . = 0 Uraian tersebut merupakan bukti dari teorema berikut ini: Teorema 13.2: Untuk setiap bilangan bulat bilangan bulat positif , berlaku : 1, jika | ( ) = 0, jika dengan suatu bilangan bulat positif. Pada teorema 13.1, telah dijelaskan bahwa jika didefinisikan oleh : =1 >1 suatu fungsi ganda dan fungsi ()= () | maka suatu fungsi ganda pula. Dari hubungan ini, kita akan mencari rumus yang dinyatakan dalam fungsi . Untu ini, kita akan menggunakan fungsi Mobius dan mendapatkan teorema berikut ini yang biasa disebut dengan rmus interval Mobius. Teorema 13.3: Misalkan dan adalah dua fungsi aritmatik yang dihubungkan oleh rumus : ( )= () | Mudah ditunjukkan bahwa | dan | , jika dan hanya jika | dan | , sehingga Maka ( ) = ∑ | ( ) Bukti: () μ(d)f(c) = f(c)μ(d) | | = ∑ | ( ) ∑ ( ) .... (1) Menurut Teorema 7.7, ∑ | = 1, jika = 1 0, jika > 1 Sehingga persamaan (1) menjadi: ( ) ( ) = ( )·1 | = ( ) Sebagai ilustrasi untuk menjelaskan penggunaan jumlahan rangkap tersbut, misalkan diambil = 10. = (1)[(1) + (2) + (5) + (10)] + (2)[(1) + (5)] , ( ) ( ) + (5)[(1) + (2)] + (10) (1) = (1)[(1) + (2) + (5) + (10)] + (2)[(1) + (5)] + (5)[(1) + (2)] + (1) (1) =∑| ∑ | ()( ) Untuk melihat bagaiaman peranan rumus inversi Mobius ini, kita perlihatkan kembali fungsi dan yang dinyatakan sebagai ( ) = ∑ | 1 dan ( ) = ∑ | maka dengan menggunakan rumus inversi Mobius (teorema 7.8), maka rumus-rumus dan tersebut dapat ditentukan inversinya, yaitu ( ) = ∑ | ( ) = 1 dan ( ) = ∑ | ( ), untuk setiap bilangan asli . Konvers dari Teorema 13.1 juga benar jika dinyatakan sebagai teorema beriku ini: Teorema 13.4: Jika suatu fungsi ganda dan ( ) = ∑ | ( ), untuk semua bilangan asli , maka adalah ganda pula. Bukti: Ambil

dua bilangan bulat positif m dan n dengan (,) = 1. Jika | **dan** = , karena (,) = 1, **maka** 90

| dan | dan (,) = 1. Dengan menerapkan rumus inversi Mobius, maka: ( )=∑ | ( ) =∑ | (,) | =∑ | ( ) ( ) | =∑ | | =∑ | Jadi, adalah fungsi ganda. (( )( )) ∑| ( ) B. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar Fungsi bilangan bulat terbesar atau fungsi kurung persegi [ ] bukan merupakan fungsi aritmatik (fungsi teori bilangan), sebab daerah asal/domainnya adalah himpunan semua bilangan real, tetapi daerah hasil/rangenya adalah himpunan bilangan bulat. Definisi 13.2: Untuk

suatu bilangan real , [ ] adalah suaut **bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan** , yaitu [ ] **adalah bilangan bulat** 63
tunggal **yang memenuhi** − 1 < [ ] ≤ . **Contoh**

13.5: −1 = −2; √3 = 1; = 0; [ ] = 3; [−] = −4. Jadi, [ ] = jika dan hanya jika x suatu bilangan bulat sehingga untuk suatu bilangan real x dapat ditulis sebagai: = [ ] + dengan 0 ≤ ≤ 1 Salah satu penggunaan konsep fungsi bilangan bulat terbesar ini adalah menentukan banyaknya faktor prima yang muncul membagi !. Sebagai contoh, berapa kalikah bilangan 3 muncul sebagai pembagi dari 9!. 9! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 = 2 · 3 · 5 · 7 Ini berarti bilangan 3 muncul sebagai pembagi 9! Sebanyak 4 kali, yang ditunjukkan oleh eksponen dari 3 dalam bentuk kanonik dari 9!. Sekarang kita menginginkan suatu rumus untuk menghitungnya tanpa menyatakan dalam bentuk kanonik. Rumus itu dinyatakan dalam teorema berikut ini: Teorema 13.5: Jika suatu bilangan bulat positif dan suatu bilangan prima, maka eksponen tertinggi dari yang membagi ! adalah (deret ini bukan deret tak hingga, karena = 0, untuk >). Bukti: Pertama, bilangan-bilangan bulat positif yang dapat dibagi oleh adalah , 2 , 3 , . . . , Dengan adalah bilangan bilangan bulat terbesar sedemikian hingga ≤ < (+ 1) . Atau dengan kata lain,

adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan , yaitu 80

= . Jadi, terdapat faktor dari ! yang faktor lainnya adalah , yaitu: , 2 , 3 , . . . , Selanjutnya dicacah banyaknya bilangan-bilangan bulat positif 1,2,3, . . . , yang tepat terbagi oleh , seperti paragraph pertama, maka benyaknya factor dari n! yang tepat terbagi oleh adalah , yaitu: , 2 , 3 , . . . , Demikian seterusnya dicacah banyaknya bilangan-bilangan bulat positif 1,2,3,4, . . . , yang tepat dibagi oleh , 2 , 3 , . . . , . Proses ini hanya berhingga banyaknya karena mesti ada pk dengan pk > n, sehingga banyaknya faktor p dari n! adalah ∞ n p Hasil ini dapat dinyatakan sebagi persamaan berikut ini, yang biasanya disebut dengan rumus Legendre: ! =∏ p ∑ Contoh13.6: Berapakah banyaknya angka nol dari repsesntasi desimal 50!? Jawab: Untuk menjawab soal tersebut menghitung banyaknya faktor 10 dari hasil kali 50!. Hal ini cukup menghitung eksponen tertinggi dari 2 dan 5 dalam faktorisai prima dari 50! dan memilih eksponennya yang terkecil. Eksponen tertinggi dari 2 dalam 50! adalah ∑ , yaitu = + + + + =25+12+6+3+1=47 Ini berarti bahwa 247 merupakan faktor dari 50!, sedangkan 248 bukan faktor dari 50!. Eksponen tertinggi dari 5 yang menjadi faktor dari 50! adalah ∑ = + = 10 + 2 = 12 Jadi, pangkat tertinggi dari 5 yang membagi 50! adalah 12. Sehingga banyaknya angka nol dalam representasi desimal dari 50! adalah 12. Teorema berikut ini mengkaitkan fungsi bilangan bulat terbesar dengan fungsi-fungsi aritmatik. Teorema 13.6: Misalkan f dan F adalah fungsi-fungsi aritmatik sedemikian hingga: ( ) = ∑ | f(d) Maka untuk sebarang bilangan bulat positif N, berlaku F(n) = f(k) N k Bukti: Dari ketentuan diperoleh bahwa F(N) = f(d) … … … … … … … … … … … … … … … … (1) | Kita akan mengumpulkan suku-suku yang nilainya sama dari f(d) dalam jumlahan rangkap tersebut. Untuk suatu bilangan bulat positif tertentu k ≤ N, suku f(k) muncul dalam ∑ | f(d) jika dan hanya jika k sebagai pembagi dari n. (karena setiap bilangan bulat mempunyai pembagi dirinya sendiri, maka ruas kanan dari (1) memuat f(k) sekurang-kurangnya sebuah suku). Selanjutnya untuk menghitung jumlahan ∑ | f(d) dimana f(k) hanya sebuah suku, cukup menentukan banyknya bilangan-bilangan bulat diantara 1, 2, 3, . . . , N yang dibagi oleh k. terdapat tepat , yaitu: k, 2k, 3k, . . . , k Jadi, untuk setiap k dengan 1 ≤ k ≤ N, adalah suatu suku dari jumlahan ∑ | f(d) untuk bilangan-bilangan bulat berbeda yang lebih kecil atau sama dengan N. hal ini dapat ditulis jumlahan rangkap dalam (1) sebagai: f(d) = f(k) N | k Sebagai penerapan teori ini, kita ambil fungsi aritmatik dan , yaitu: (n) = 1 dan σ(n) = d |

Jika N suatu **bilangan bulat positif, maka** τ(**n) = N** dan σ(**n**) = n **N n n** 75

Contoh 13.7: Hitunglah (a) ∑ τ(n) dan (b) ∑ σ(n) Jawab: (a) ∑ τ(n) = ∑ = [6] + [3] + [2] + + + [1] =6+3+2+1+1+1=14 (b) ∑ σ(n) = ∑ n = 1. [6] + 2.[3] + 3. [2] + 4. + 5. + 6 [1] = 1.6 + 2.3 + 3.2 + 4.1 + 5.1 + 6.1 = 33 DAFTAR PUSTAKA Rosen, K. H. (2011). Elementary number theory. London: Pearson Education. Sukirman. (2006). Pengantar teori bilangan. Yogyakarta: UNY Press. Wahyu Henky (2014). Pengantar teori bilangan. Malang: UIN-Maliki Press. 95 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 1 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 2 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 3 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 4 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 5 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 6 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 7 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 8 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 9 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 10 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 11 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 12 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 13 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 14 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 15 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 16 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 17 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 18 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 19 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 20 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 21 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 22 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 23 Modul Teori Biangan –

Program Rekognisi Masa Lampau 24 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 25 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 26 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 27 Modul Teori Biangan – Program Rekognisi Masa Lampau 28 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajarna Lampau 29 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajarna Lampau 30 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajarna Lampau 31 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajarna Lampau 32 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajarna Lampau 33 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajarna Lampau 34 Modul Teori Bilangan 35 Modul Teori Bilangan 36 Modul Teori Bilangan 37 Modul Teori Bilangan 38 Modul Teori Bilangan 39 Modul Teori Bilangan 40 Modul Teori Bilangan 41 Modul Teori Bilangan 42 Modul Teori Bilangan 43 Modul Teori Bilangan 44 Modul Teori Bilangan 45 Modul Teori Bilangan 46 Modul Teori Bilangan 47 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 48 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 49 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 50 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 51 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 52 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 53 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 54 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 55 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 56 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 57 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 58 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 59 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 60 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 61 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 62 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 63 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 64 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 65 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 66 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 67 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 68 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 69 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 70 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 71 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 72 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 73 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 75 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 76 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 77 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 78 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 79 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 80 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 81 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 82 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 83 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 84 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 85 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 86 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 87 Modul Teori Bilangan – Program Rekognisi Pembelajaran Lampau 88 Modul Teori Bilangan 89 Modul Teori Bilangan 90 Modul Teori Bilangan 91 Modul Teori Bilangan 92 Modul Teori Bilangan 93 Modul Teori Bilangan 94 Modul Teori Bilangan 95 Modul Teori Bilangan 96 Modul Teori Bilangan 97 Modul Teori Bilangan 98 Modul Teori Bilangan 99 Modul Teori Bilangan 100 Modul Teori Bilangan 101

sources:

1 242 words / 1% - Internet from 07-Feb-2018 12:00AM
putriliaismawati.blogspot.com

2 115 words / 1% - from 30-Mar-2023 12:00AM
www.researchgate.net

3 109 words / 1% - from 30-Mar-2023 12:00AM
www.researchgate.net

4 215 words / 1% - Internet from 07-Dec-2019 12:00AM
usmcr010.blogspot.com

5 161 words / 1% - Internet from 16-Dec-2022 12:00AM
etheses.uin-malang.ac.id

6 157 words / 1% - Internet
Istiqomah, Istiqomah. "PENERAPAN TEOREMA BINOMIAL UNTUK MENENTUKAN PELUANG KEJADIAN (KASUS :PERCOBAAN PELEMPARAN KOIN TAK SEIMBANG)", 'Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa', 2016

7 166 words / 1% - from 11-Jun-2023 12:00AM
repository.uinsu.ac.id

8 141 words / 1% - Internet

Rahma, Ade Novia, Rahmawati, Rahmawati, Zukrianto, Zukrianto. "APLIKASI SISTEM MODULO 7 DALAM PREDIKSI PERINGATAN HARI BESAR NASIONAL INDONESIA TAHUN 2030", 'Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang', 2020

9 123 words / 1% - Internet from 15-Jan-2017 12:00AM
lyanasikumbang.blogspot.com

10 107 words / 1% - Internet from 07-Jan-2022 12:00AM
myblogmath2.blogspot.com

11 104 words / 1% - Internet from 05-Mar-2023 12:00AM
ppjp.ulm.ac.id

12 101 words / < 1% match - Internet from 29-Oct-2022 12:00AM
eprints.uny.ac.id

13 91 words / < 1% match - Internet
Rininda Ulfa Arizka, -. "Penerapan Sistem Kriptografi ElGamal atas Dalam Pembuatan Tanda Tangan Digital", 2011

14 10 words / < 1% match - Internet
Isnaini, Herdita Fajar, Karyati, Karyati. "PENERAPAN SKEMA TANDA TANGAN SCHNORR PADA PEMBUATAN TANDA TANGAN DIGITAL", 2016

15 20 words / < 1% match - Internet from 21-May-2020 12:00AM
etheses.uin-malang.ac.id

16 10 words / < 1% match - Internet
Maghfiroh, Jamilatul. "Pengamanan pesan menggunakan algoritma One Time Pad (OTP) dengan Linear Congruential Generator (LCG) sebagai pembangkit kunci", 2022

17 10 words / < 1% match - Internet
Alvionita, Rena. "Implementasi algoritma super enkripsi (Affine Cipher dan Route Cipher) pada pesan teks", 2021

18 12 words / < 1% match - Internet from 15-Sep-2021 12:00AM
jurnal.ustjogja.ac.id

19 99 words / < 1% match - from 20-Mar-2023 12:00AM
pdfcookie.com

20 54 words / < 1% match - Internet from 06-Jan-2023 12:00AM
dokumen.tips

21 42 words / < 1% match - Internet from 10-Oct-2021 12:00AM
dokumen.tips

22 72 words / < 1% match - from 22-Mar-2023 12:00AM
WWW.coursehero.com

23 13 words / < 1% match - Internet from 28-Aug-2021 12:00AM
www.coursehero.com

24 11 words / < 1% match - from 01-Apr-2024 12:00AM
WWW.coursehero.com

25 89 words / < 1% match - Internet from 18-May-2019 12:00AM
helda-blog.blogspot.com

26 87 words / < 1% match - Internet from 25-Nov-2020 12:00AM
indrawanpradinata.wordpress.com

27	86 words / < 1% match - Internet from 30-Oct-2021 12:00AM 123dok.com
28	72 words / < 1% match - from 19-Mar-2023 12:00AM e-theses.iaincurup.ac.id
29	64 words / < 1% match - Internet from 05-Nov-2015 12:00AM repository.usu.ac.id
30	58 words / < 1% match - from 06-Apr-2023 12:00AM odierealanalysis.blogspot.com
31	51 words / < 1% match - Internet from 12-Sep-2017 12:00AM slimmath.weebly.com
32	48 words / < 1% match - Internet from 09-Nov-2020 12:00AM jokoaguspurnomo.files.wordpress.com
33	44 words / < 1% match - Internet from 17-Feb-2023 12:00AM blogmeths.blogspot.com
34	43 words / < 1% match - Internet from 28-Dec-2021 12:00AM www.kondiskorabat.com
35	41 words / < 1% match - from 26-Dec-2023 12:00AM www.powtoon.com
36	40 words / < 1% match - Internet Gomes, Ataniel Rogério Gonçalves. "Uma abordagem do ensino de congruência na educação básica", 'FAI-UFSCar', 2015
37	37 words / < 1% match - Internet from 24-Oct-2022 12:00AM rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com
38	36 words / < 1% match - Internet from 13-Jul-2020 12:00AM spada.ristekdikti.go.id
39	36 words / < 1% match - Internet from 21-Mar-2019 12:00AM www.seratusinstitute.com
40	35 words / < 1% match - Internet from 25-Mar-2019 12:00AM fachruur.blogspot.com
41	33 words / < 1% match - Internet from 03-Nov-2019 12:00AM compilandoconocimiento.github.io
42	32 words / < 1% match - Internet from 11-Jan-2020 12:00AM ebooktake.in
43	32 words / < 1% match - from 06-May-2024 12:00AM html.pdfcookie.com
44	27 words / < 1% match - Internet from 02-Oct-2022 12:00AM laurensommers.files.wordpress.com

45 26 words / < 1% match - from 25-Jan-2024 12:00AM
1library.org

46 26 words / < 1% match - Internet from 17-Nov-2020 12:00AM
fitrimheysuci.blogspot.com

47 26 words / < 1% match - Internet from 28-Dec-2017 12:00AM
repository.uinjkt.ac.id

48 25 words / < 1% match - Internet from 29-May-2021 12:00AM
dikdasmen.my.id

49 15 words / < 1% match - Internet from 01-Jan-2023 12:00AM
"Persamaan Diophantus", Wikipedia, id, 2023

50 10 words / < 1% match - Internet from 01-Jan-2021 12:00AM
"Eksponensiasi", Wikipedia, id, 2021

51 24 words / < 1% match - Internet from 24-Aug-2016 12:00AM
mandiribelajarsains.blogspot.com

52 13 words / < 1% match - from 23-Oct-2023 12:00AM
idoc.tips

53 10 words / < 1% match - from 10-Oct-2023 12:00AM
idoc.tips

54 23 words / < 1% match - Internet
Handayanto, Agung. "PERANAN SISTEM MODULO DALAM PENENTUAN HARI DAN PASARAN", 'Universitas PGRI Semarang', 2012

55 22 words / < 1% match - Internet from 18-Oct-2020 12:00AM
ugag.starserviceconsulting.it

56 11 words / < 1% match - from 13-Jun-2023 12:00AM
vdocuments.mx

57 11 words / < 1% match - from 24-Jun-2023 12:00AM
vdocuments.mx

58 22 words / < 1% match - Internet from 14-Nov-2020 12:00AM
www.slideshare.net

59 21 words / < 1% match - from 19-Sep-2023 12:00AM
educationbymath.blogspot.com

60 10 words / < 1% match - Internet from 28-Aug-2019 12:00AM
id.scribd.com

61 10 words / < 1% match - Internet from 13-May-2020 12:00AM
id.scribd.com

62 19 words / < 1% match - Internet from 22-Oct-2021 12:00AM
butsinegara.blogspot.com

63 19 words / < 1% match - Internet from 08-Feb-2019 12:00AM
cecepanwar.blogspot.com

64	19 words / < 1% match - from 08-Apr-2023 12:00AM ejournal.uin-suska.ac.id
65	17 words / < 1% match - from 24-Jan-2024 12:00AM isco-iss.faperta.unpad.ac.id
66	17 words / < 1% match - Internet from 06-Feb-2022 12:00AM lp3.unism.ac.id
67	16 words / < 1% match - from 05-Jan-2024 12:00AM vdocuments.pub
68	16 words / < 1% match - Internet from 31-Jan-2019 12:00AM zh.scribd.com
69	14 words / < 1% match - Internet from 29-Mar-2021 12:00AM cdn-gbelajar.simpkb.id
70	14 words / < 1% match - Internet from 14-May-2020 12:00AM fr.scribd.com
71	13 words / < 1% match - Crossref "A Concrete Introduction to Higher Algebra", Springer Science and Business Media LLC, 2009
72	13 words / < 1% match - from 14-Mar-2024 12:00AM ia803005.us.archive.org
73	12 words / < 1% match - Internet Sanchez-Rivero, Javier, Talaván, Daniel, Garcia-Alonso, Jose, Ruiz-Cortés, Antonio, Murillo, Juan Manuel. "Operating with Quantum Integers: an Efficient 'Multiples of' Oracle", 2023
74	12 words / < 1% match - Internet from 26-Sep-2022 12:00AM i-mes.org
75	12 words / < 1% match - Internet from 23-Nov-2020 12:00AM matematikadw.files.wordpress.com
76	12 words / < 1% match - Internet from 12-Nov-2020 12:00AM pangestuti-thecolourmath.blogspot.com
77	12 words / < 1% match - from 01-Dec-2023 12:00AM pdffox.com
78	12 words / < 1% match - Internet from 14-Nov-2020 12:00AM soalterbaru.com
79	11 words / < 1% match - Internet from 11-Dec-2020 12:00AM agus-chandra.blogspot.com
80	11 words / < 1% match - Internet from 28-Oct-2018 12:00AM docobook.com
81	11 words / < 1% match - Internet from 12-Mar-2020 12:00AM funwithmath18.blogspot.com

82 11 words / < 1% match - Internet from 28-Jul-2016 12:00AM
issuu.com

83 11 words / < 1% match - Internet from 18-Nov-2022 12:00AM
jurnal.lppm.unsoed.ac.id

84 11 words / < 1% match - Internet from 23-Nov-2020 12:00AM
kiseriotamatematika.blogspot.com

85 11 words / < 1% match - from 04-Oct-2023 12:00AM
php.math.unifi.it

86 11 words / < 1% match - from 25-Jun-2023 12:00AM
repository.umsu.ac.id

87 11 words / < 1% match - Internet from 16-Dec-2022 12:00AM
spada.uns.ac.id

88 11 words / < 1% match - Internet from 03-Nov-2021 12:00AM
text-id.123dok.com

89 10 words / < 1% match - Internet from 22-Dec-2021 12:00AM
anianakcerdas.blogspot.com

90 10 words / < 1% match - Internet from 13-Jul-2020 12:00AM
jmua.fmipa.unand.ac.id

91 10 words / < 1% match - Internet from 14-Nov-2020 12:00AM
julanhernadi.files.wordpress.com

92 10 words / < 1% match - Internet from 19-Aug-2019 12:00AM
jurnalabdul.blogspot.com

93 10 words / < 1% match - Internet from 12-Nov-2020 12:00AM
ovieciinduts.blogspot.com

94 10 words / < 1% match - Internet
Rifa'id, Rifa'id. "Kekongruenan Untuk Hasil Bagi Fermat Modulo P4", 2018

95 10 words / < 1% match - from 09-Jun-2023 12:00AM
statistika.fmipa.hamzanwadi.ac.id

96 10 words / < 1% match - Internet from 03-Dec-2017 12:00AM
yudhadwinugroho.blogspot.com