Matematika DASAR

Matematika tidak akan pernah dipisahkan dengan bilangan-bilangan.

Adapun tujuan dari penyusunan buku ini adalah agar mahasiswa lebih memahami dan menguasai matematika sebagai pendukung dan prasyarat untuk menempuh mata kuliah yang lainnya. Dalam buku ini, diberikan beberapa konsep dan teori yang berkaitan pemahaman dasar matematika sehingga diharapkan mahasiswa dapat memanfaatkannya untuk memahami mata kuliah lain yang relevan.

Buku ini sengaja disusun untuk memenuhi kebutuhan perkuliahan pada mata kuliah Matematika Dasar, bagi mahasiswa maupun dosen karena selama ini buku-buku yang berkaitan dengan mata kuliah keahlian masih kurang.

Sanabil
Puri Bunga Amanah
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946
Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabilpublishing.com

ISBN 978-623-317-131-1

Lalu Muhammad Fauzi, Muhammad Gazali dan Jatmiko

Matematika Dasar

Sanabil

Sanabil

Matematika DASAR

Lalu Muhammad Fauzi
Muhammad Gazali
Jatmiko

MATEMATIKA DASAR

Lalu Muhammad Fauzi
Muhammad Gazali
Jatmiko

MATEMATIKA DASAR

Sanabil

MATEMATIKA DASAR

Penulis	: Lalu Muhammad Fauzi Muhammad Gazali Jatmiko
Editor	: Ristu Haiban Hirzi
Layout	: Sanabil Creative
Desain Cover	: Sanabil Creative

ISBN	: 978-623-317-131-1
Cetakan 1	: Agustus 2021

Penerbit:
Sanabil
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabil.web.id

KATA PENGANTAR

Bismillahi Wabihamdihi

Assalamu'alaikum Warohmatullohi Wabarikatuh

Puji Syukur kami haturkan kepada Alloh SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kami, sehingga buku Matematika Dasar ini dapat diselesaikan, kalaupun masih sangat sederhana sekali.

Adapun tujuan dari penyusunan buku ini adalah agar mahasiswa lebih memahami dan menguasai matematika sebagai pendukung dan prasyarat untuk menempuh mata kuliah yang lainnya. Dalam buku ini, diberikan beberapa konsep dan teori yang berkaitan pemahaman dasar matematika sehingga diharapkan mahasiswa dapat memanfaatkannya untuk memahami mata kuliah lain yang relevan.

Buku ini sengaja disusun untuk memenuhi kebutuhan perkuliahan pada mata kuliah Matematika Dasar, bagi mahasiswa maupun dosen karena selama ini buku-

buku yang berkaitan dengan mata kuliah keahlian masih kurang.

Terima kasih untuk institusi kami (Universitas Hamzanwadi dan UNP Kediri), semua orang-orang terdekat, serta keluarga yang senantiasa memberikan semangat bagi kami untuk lebih bijak dalam menjalani hidup. Dan semoga apa yang diberikan, sekecil apapun itu akan menjadi amal ibadah yang mengalir tanpa hentinya.

Akhirnya kami menyampaikan selamat membaca dan mempelajari buku ini kepada mahasiswa dan semua yang berkenan seta yang berkepentingan dengan buku ini. Sekali lagi terimakasih semoga buku ini bermanfaat walau sedikit sekalipun.

Wassalamu'alaikum Warohmatullohi Wabarokatuh.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
BILANGAN

A. Himpunan Bilangan

Matematika tidak akan pernah dipisahkan dengan bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan pada matematika dapat dibedakan berdasarkan definisi tertentu sehingga bilangan-bilangan tersebut dapat dikelompokkan menjadi suatu himpunan bilangan tertentu pula. Misalnya 1, 2, 3, ... dan seterusnya dapat dikelompokkan ke dalam himpunan bilangan asli. Himpunan bilangan asli tersebut dapat ditulis dengan notasi $A = \{1, 2 , 3, 4, 5, ...\}$.

a) Himpunan Bilangan Asli

Bilangan asli merupakan bilangan yang paling sederhana dan yang sering kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti untuk menghitung banyaknya orang yang datang pada sebuah pesta atau banyaknya hasil pertanian. Bilangan asli sering pula disebut sebagai bilangan natural karena secara alamiah kita mulai menghitung dari angka 1, 2, 3, dan seterusnya. Bilangan-bilangan tersebut membentuk suatu himpunan bilangan yang disebut sebagai himpunan bilangan asli. Himpunan bilangan ini dilambangkan dengan huruf A dan anggota himpunan dari bilangan asli dinyatakan sebagai berikut.

$$A = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

b) **Himpunan Bilangan Cacah**

Dalam sebuah kelas dari 40 siswa akan dilakukan pengelompokan menurut hobi dari masing-masing siswa dan akan dikelompokan berdasarkan siswa yang hobi membaca, hobi jalan-jalan, hobi olahraga dan hobi menari, setelah dilakukan pengelompokan diketahui bahwa banyak siswa yang hobi membaca 15 orang, hobi jalan-jalan sebanyak 16 orang, hobi olahraga sebanyak 9 orang dan ternyata tidak ada siswa yang memiliki hobi menari. Untuk menyatakan banyaknya anggota yang tidak memiliki hobi menari tersebut, digunakan bilangan 0. Gabungan antara himpunan bilangan asli dan himpunan bilangan 0 ini disebut sebagai himpunan bilangan cacah.

Himpunan bilangan ini dilambangkan dengan huruf "C" dan anggota himpunan dari bilangan cacah dinyatakan sebagai berikut:

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

c) **Himpunan Bilangan bulat**

Dalam sebuah garis bilangan ada dua ruas yaitu ruas pada bilangan positif dan negatif yang dipisahkan oleh bilangan nol, sehingga bilangan bulat terbagi menjadi dua buah yaitu bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bilangan ini dilambangkan dengan huruf "B" dan anggota himpunan dari bilangan bulat dinyatakan sebagai berikut:

$$B = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

d) **Himpunan Bilangan Prima**

Bilangan prima adalah bilangan yang tepat memiliki dua faktor yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Semua anggota bilangan prima adalah bilangan ganjil kecuali 2.

Contoh Bilangan Prima :

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots\}$

e) **Himpunan Bilangan Rasional**

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b masing-masing merupakan anggota himpunan bilangan bulat dengan syarat $b \neq 0$. Contohnya $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ dan seterusnya. Adapun himpunan bilangan rasional terdiri dari bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal.

f) **Himpunan Bilangan Irasional**

Kebalikan dari bilangan rasional yakni bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$. tapi dapat dinyatakan dengan bilangan desimal tak tentu atau tak berulang, misalnya : $e = 2{,}71828\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ dan lain sebagainya.

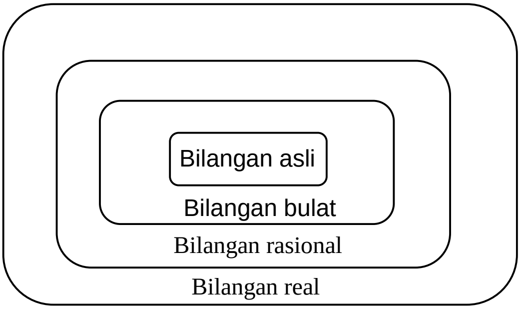
Dalam matematika bilangan seperti halnya titik, garis, dan bidang merupakan konsep awal, yakni unsur yang bersifat mendasar, sering dipakai tetapi tidak pernah dapat didefinisikan secara tepat. Sehingga bila dinyatakan apakah bilangan itu? Jawabannya menjadi beragam. Tetapi jika yang dinyatakan adalah bilangan asli, bilangan cacah, bilangan, prima dan yang lainya jawabannya jelas dan tertentu.

Misalkan:

1) Bilangan asli (A) adalah bilangan yang dimulai dari satu sampai dengan seterusnya
2) Bilangan cacah (C) adalah bilangan yang dimulai dari nol dan seterusnya
3) Bilangan bulat (B) adalah bilangan yang terdiri dari bilangan bulat positif , nol dan bilangan bulat negatif.
4) Bilangan rasional (Q) adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan biasa.
5) Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalambentuk pecahan biasa.
6) Bilangan real (R) adalah bilangan yang memuat bilangan rasional dan bilangan irasional

7) Bilangan kompleks (Z) adalah bilangan yang memuat bilangan real dan bilangan imajiner (bilangan hayal).

Terdapat lambang-lambang baku untuk mengenal kelas-kelas bilangan. Misalnya N (bilangan asli), Z (bilangan bulat), Q (bilangan rasional) dan R (bilangan real), dalam bentuk himpunan dapat digambarkan sebagai:



B. Sifat Ketidaksamaan Bilangan Real

a. Sembarang bilangan Real a dan b, dapat terjadi salah satu dari tiga hal yaitu : $a < b$, $b < a$, atau $a = b$.

b. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$.

c. Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ untuk sembarang nilai c.

d. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.

e. Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$.

Sistem bilangan Real dibentuk atas dasar sistem bilangan Asli, di mana semua sifat-sifatnya dapat diturunkan. Jika x, y, dan z adalah bilangan Real maka sifat-sifat bilangan Real adalah :

a. Sifat komutatif untuk penjumlahan

   $x + y = y + x$

b. Sifat komutatif untuk perkalian

   $x.y = y.x$

c. Sifat assosiatif untuk penjumlahan

   $x + (y + z) = (x + y) + z$

d. Sifat assosiatif untuk perkalian

   $x (yz) = (xy) z$

e. Sifat distributif

   $x (y + z) = xy + xz$

f. Jika x dan y dua bilangan Real, maka terdapat suatu bilangan Real z sehingga $x + z = y$. Bilangan z ini kita nyatakan dengan $y - x$ dan disebut selisih dari y dan x. Selisih $x - x$ kita nyatakan dengan simbol 0. Simbol 0 ini selanjutnya disebut nol.

g. Terdapat paling sedikit satu bilangan real $x \neq 0$. Jika x dan y dua bilangan Real dengan $x \neq 0$, maka terdapat suatu bilangan Real z demikian sehingga $x.z = y$.

Bilangan z ini kita nyatakan dengan $\frac{x}{y}$ dan disebut hasil bagi dari y dan x. Hasil bagi x dan x dinyatakan dengan simbol 1, yang selanjutnya disebut satu dan tidak bergantung pada x.

BAB II

BENTUK PANGKAT, AKAR DAN LOGARITMA

A. Bentuk pangkat bulat

Bilangan berpangkat merupakan perkalian berulang suatu bilangan, dimana bilangan dapat berpangkat bulat positif, nol, maupun bulat negatif. Secara sederhana penulisan bilangan jenis ini adalah sebagai berikut : $a^n = a \times a \times a \times \ldots . . \times a$

a disebut bilangan pokok atau basis, sedangkan n disebut pangkat atau eksponen

Ada 3 jenis bilangan berpangkat yang perlu diketahui, diantaranya bilangan berpangkat positif, bilangan berpangkat negatif, dan bilangan berpangkat nol.

1. Pangkat bulat positif

Perkalian berulang dari suatu bilangan dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan berpangkat bilangan bulat positif.

Contoh:

$3 = 3^1$

$3 \cdot 3 = 3^2$

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

Bentuk 3^4 dibaca "tiga pangkat empat". 3^4 disebut bilangan berpangkat bulat positif. Bilangan 3 disebut bilangan pokok atau bilangan dasar dan bilangan 4 yang ditulis agak di atas disebut pangkat atau eksponen. Secara umum bilangan berpangkat dapat ditulis :

Jika a bilangan real atau $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka $a^n = a.a.a.a....a$

a disebut bilangan pokok dan n disebut pangkat.

Contoh

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
2. $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

3. $648 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 2^3.3^3$

2. Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Pada bilangan berpangkat bulat positif dapat dilakukan beberapa operasi aljabar seperti : perkalian, pemangkatan, dan pembagian untuk bilangan berpangkat bulat positif. Perhatikan teorema-teorema untuk bentuk perkalian, pemangkatan, dan pembagian dari bilangan berpangkat bulat positif berikut:

a. Jika a bilangan real, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

   $a^p.a^q = a^{p+q}$

b. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q bilangan bulat positif maka

$$\frac{a^p}{a^q} = \begin{cases} a^{p-q} \text{ ; jika } p > q \\ \dfrac{1}{a^{q-p}} \text{ ; jika } q > p \\ 1 \text{ ; jika } p = q \end{cases}$$

c. Jika a bilangan real, p dan q bilangan bulat positif maka

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} = a^{pq}$$

d. Jika a dan b bilangan real, p bilangan bulat maka

$$(ab)^p = a^p . b^p$$

Contoh

Contoh 1.3

Sederhanakan :

1) $2^3 . 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
2) $x^2 . x^4 = x^{2+4} = x^6$
3) $(2x^3y)(-3x^2y^3) = 2(-3)x^{3+2}y^{1+3} = -6x^5y^4$

3. Pangkat Bulat Negatif dan Nol

Jika pada bentuk perpangkatan pangkat dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negatif dan nol.

Contoh

1. $3^{-1};3^{-2};3^{-3};3^{-4};3^{-5}$ dan 3^0
2. $a^{-1};a^{-2};a^{-3};a^{-4};\ldots..;a^{-n}$ dan a^0

Untuk mendefinisikan a^n dengan a bilangan real dan n bilangan bulat negarif dan nol, maka dapat didefinisikan sebagai:

Jika a ≠ 0, a bilangan real dan n bilangan bulat positif maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dan } a^0 = 1$$

B. Bentuk Akar

Bentuk akar adalah sebuah bilangan yang hasilnya bukan termasuk bilangan rasional, dan digunakan sebagai bentuk lain untuk menyatakan sebuah bilangan berpangkat. Di notasikan dengan “ √ “.

Bentuk-bentuk berikut merupakan contoh bentuk akar :

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{21}$ dan seterusnya

Operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dapat juga dilakukan terhadap bentuk akar. Operasi tersebut digunakan untuk merasionalkan penyebut yang dinyatakan dalam bentuk akar. Operasi-operasi aljabar tersebut adalah sebagai berikut :

Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Contoh

a. $\sqrt{2}\ x\ \sqrt{3} = \sqrt{2\ x\ 3} = \sqrt{6}$

b. $\sqrt{5}\ x\ \sqrt{10} = \sqrt{5\ x\ 10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

c. $2\sqrt{3}\ x\ 4\sqrt{7} = 2\ x\ 4\ x\ \sqrt{3\ x\ 7} = 8\sqrt{21}$

Sifat-sifat Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Uraian tersebut menggambarkan sifat perkalian bentuk akar sebagai berikut.

$$\boldsymbol{p\sqrt{a}\ x\ q\sqrt{b} = pq\sqrt{ab}}$$

dengan *a, b, p,* dan *q* bilangan real dimana $a \geq 0$ dan $b \geq 0$

Sekarang, perhatikan Sifat pembagian di atas. Jika dibalik, sifat tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan pembagian bentuk akar berikut.

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

b. $\frac{8\sqrt{2}}{12\sqrt{3}} = \frac{8}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

Uraian tersebut menggambarkan sifat pembagian bentuk akar sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\frac{p\sqrt{a}}{q\sqrt{b}} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

dengan *a, b, p,* dan *q* bilangan real dimana $a \geq 0$ dan $b \geq 0$

C. Pangkat Pecahan

Misalkan a bilangan Real tidal nol dan n bilamgan bulat positif , maka pangkat pecahan $\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}}$ sama dengan akar pangkat n dari bilagan a.

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{a}}$$

Dengan $\boldsymbol{\sqrt[\mathrm{n}]{a}}$ merupakan bilangan real.

Misalkan a bilangan real tidak nol, m bilangan bulat dan n bilangan asli≥2, maka pangkat pecahan $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$ sama dengan akar pangkat n dari bilangan a^m

Ditulis:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Dengan catatan $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$ merupakan bilangan real.

Contoh

1. $\boldsymbol{\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2}$
2. $\boldsymbol{\sqrt[7]{64} = \sqrt[7]{2^6} = 2^{\frac{6}{7}}}$

D. Logaritma

Pengertian logaritma sebagai invers (kebalikan) dari perpangkatan, dapat dijelaskan melalui pembahasan berikut ini :

Contoh :

1) $2^4 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 16$

2) $10^3 = 10 \text{ x } 10 \text{ x } 10 = 1.000$

Dari contoh di atas tampak bahwa apabila bilangan pokok dan pangkatnya diketahui maka dapat ditentukan hasil perpangkatannya. Nah! Permasalahannya adalah bagaimana cara menentukan pangkat, apabila bilangan pokok dan hasil perpangkatannya diketahui:

Misal :

1) Berapa n, jika $2^n = 16$

2) Berapa x, jika $10^x = 1.000$

Jawaban permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan cara yang disebut logaritma. Nilai n atau x tersebut ditentukan sebagai berikut :

1) $2^n = 16$ maka $n = {}^2\log 16 = {}^2\log 2^4 = 4$

2) $10^x = 1.000$ maka $x = {}^{10}\log 1.000 = {}^{10}\log 10^3 = 3$

Sekarang terlihat bahwa antara logaritma dan perpangkatan terdapat hubungan, yaitu bahwa logaritma merupakan invers (kebalikan) dari perpangkatan, sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

Logaritma suatu bilangan x dengan bilangan pokok a (ditulis ${}^{a}\log x$) adalah eksponen bilangan berpangkat yang menghasilkan x jika a dipangkatkan dengan eksponen itu.

Dirumuskan :

${}^{a}\log x = n$ artinya $x = a^n$ untuk $a > 0$; $a \neq 1$ dan $x > 0$

a disebut bilangan pokok

x disebut bilangan logaritma atau numerus dengan $x > 0$

n disebut hasil logaritma atau eksponen dari basis

Untuk lebih memahami konsep ini ikutilah contoh – contoh berikut ini dengan teliti agar kamu tidak menemui hambatan di kemudian hari .

Contoh

1. Nyatakan dalam bentuk logaritma:

    a. $3^4 = 81$

b. $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

c. $0{,}001 = 10^{-3}$

Pembahasan

a. $3^4 = 81 \Leftrightarrow {}^{3}\log 81 = 4$

b. $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow {}^{2}\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

c. $0{,}001 = 10^{-3} \Leftrightarrow {}^{10}\log 0{,}001 = -3$

2. Nyatakan dalam bentuk pangkat

a. ${}^{5}\log 25 = 2$

b. ${}^{3}\log \frac{1}{27} = -3$

c. ${}^{a}\log b = c$

Pembahasan

a. ${}^{5}\log 25 = 2 \Leftrightarrow 25 = 5^2$

b. ${}^{3}\log \frac{1}{27} = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} = 3^{-3}$

c. ${}^{a}\log b = c \Leftrightarrow b = a^c$

3. Tentukan nilai logaritma berikut!

a. ${}^{2}\log 32$

b. ${}^{3}\log 3\sqrt{3}$

c. ${}^{2}\log \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Pembahasan

a. ${}^{2}\log 32 = {}^{2}\log 2^5 = 5$

b. ${}^{3}\log 3\sqrt{3} = {}^{3}\log 3^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$

c. ${}^{2}\log \frac{1}{2}\sqrt{2} = {}^{2}\log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

Sifat-sifat logaritma

Ada 7 sifat pada logaritma ini yang akan membantu kamu dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan logaritma yaitu :

Sifat 1

${}^{a}\log x + {}^{a}\log y = {}^{a}\log xy$

Contoh

Sederhanakanlah

a. ${}^{3}\log \frac{1}{9} + {}^{3}\log 81$

b. ${}^{2}\log 2\sqrt{2} + {}^{2}\log 4\sqrt{2}$

Pembahsan

a. ${}^{3}\log \frac{1}{9} + {}^{3}\log 81 = {}^{3}\log \frac{1}{9} \cdot 81 = {}^{3}\log 9 = 2$

b. ${}^{2}\log\ 2\sqrt{2}\ + {}^{2}\log\ \ 4\sqrt{2} = {}^{2}\log\ 2\sqrt{2}\ .\ 4\sqrt{2} = {}^{2}\log 16 =$ 4

Sifat 2

${}^{a}\log x - {}^{a}\log y = {}^{a}\log \frac{x}{y}$

Contoh

Sederhanakanlah

a. ${}^{2}\log 16 - {}^{2}\log 8$

b. $\log 1.000 - \log 100$

Pembahasan

a. ${}^{2}\log 16 - {}^{2}\log 8 = {}^{2}\log \frac{16}{8} = {}^{2}\log 2 = 1$

b. $\log 1.000 - \log 100 = \log \frac{1000}{100} = \log 10 = 1$

Sifat 3

${}^{a}\log x^{n} = n\ .\ {}^{a}\log x$

Contoh

Sederhanakan!

a. $2 \log 3 + 4 \log 3$

b. $2 \log a + 2 \log b$

Jawab:

a. $2 \log 3 + 4 \log 3 = \log 3^2 + \log 3^4$

$= \log 9 + \log 81$

$= \log 9 \,.\, 81$

$= \log 729$

b. $2 \log a + 2 \log b = \log a^2 + \log b^2$

$= \log a^2 \,.\, b^2$

$= \log (ab)^2$

Sifat 4

a. ${}^a\log x = \dfrac{{}^c\log x}{{}^c\log a}$

b. ${}^g\log a = \dfrac{1}{{}^a\log g}$

Contoh :

${}^3\log 7 \;\; x \;\; {}^7\log 81$

Pembahasan

${}^3\log 7 \;\; x \;\; {}^7\log 81 \;=\; {}^3\log 7 x \; {}^7\log 81$

$= \dfrac{\log 7}{\log 3} x \dfrac{\log 81}{\log 7}$

$$= \frac{\log 3^4}{\log 3}$$

$$= \frac{4\log 3}{\log 3} = 4$$

Sifat 5

$a^{{}^{a}\log x} = x$

Contoh :

a. $4^{{}^{2}\log 5} = \left(2^2\right)^{{}^{2}\log 5}$

b. $\sqrt{3}^{{}^{3}\log 2} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{{}^{3}\log 2}$

Jawab :

a. $4^{{}^{2}\log 5} = \left(2^2\right)^{{}^{2}\log 5} = \left(2^{{}^{2}\log 5}\right)^2 = 5^2 = 25$

b. $\sqrt{3}^{{}^{3}\log 2} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{{}^{3}\log 2} = \left(3^{{}^{3}\log 2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Sifat 6

Perhatikan uraian berikut untuk menunjukkan sifat 6 logaritma ini :

a. $a\ {}^{p^n}\log a^m = \frac{\log a^m}{\log p^n} = \frac{m.\log a}{n.\log p} = \frac{m}{n}\ {}^{p}\log a$

b. Jika m = n maka diperoleh :

$$^{p^n}\log a^m = \frac{\log a^n}{\log p^n} = \frac{n.\log a}{n.\log p} = {}^{p}\log a$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa :

Untuk p dan a bilangan real positif p ≠ 1 maka :

$$^{p^n}\log a^m = \frac{m}{n}\ {}^{p}\log a$$

$$^{p^n}\log a^n = {}^{p}\log a$$

Jika numerus dan bilangan pokok dipangkatkan dengan bilangan yang sama maka hasilnya tetap.

Contoh

Hitunglah !

1. $^{8}\log 16$
2. $^{8}\log 64$
3. Jika $^{3}\log 5$ = a hitunglah $^{25}\log 27$

Pembahasan

1. $^{8}\log 16 = {}^{2^3}\log 2^4 = \frac{4}{3}\ {}^{2}\log 2 = \frac{4}{3}.1 = \frac{4}{3}$
2. $^{8}\log 64 = {}^{2^3}\log 2^6 = \frac{6}{3}.{}^{2}\log 2 = \frac{6}{3}.1 = 2$
3. $^{3}\log 5$ = a, maka :

$$^{25}\log 27 = {}^{5^2}\log 3^3 = \frac{3}{2}.{}^{5}\log 3 = \frac{3}{2}.\frac{1}{{}^{3}\log 5} = \frac{3}{2}.\frac{1}{a} = \frac{3}{2a}$$

Sifat 7

Perhatikan uraian di bawah ini!

Misalkan n = $^{p}\log$ a, maka a = p^n, oleh karena n = $^{p}\log$ a, maka p^n = $p^{{}^{p}\log a} = a$ (karena a = p^n) sehingga disimpulkan :

Untuk p dan a bilangan real p ≠ 1 maka $p^{{}^{p}\log a} = a$

BAB III

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

A. Persamaan dan pertidaksamaan linier satu variabel

1. Persamaan Linier Satu Variabel

Pengertian Persamaan Linier Satu Variabel

Sebelum mempelajari sistem persamaan linier lebih jauh kita terlebih dahulu mempelajari tentang kalimat pernyataan. Perhatikan contoh kalimat pernyataan dibawah ini:

a. Jumlah pemain sepak bola adalah 14 orang (salah)
b. Balok merupakan bangun ruang (betul)
c. 13 adalah bilangan prima (betul)
d. Bilangan genap dikalikan dengan bilangan ganjil hasilnya adalah bilangan ganjil (salah)

Berdasarkan uraian di atas maka dapat disimpulkan bahwa kalimat pernyataan adalah kalimat yang dapat diketahui betul atau salahnya. Setelah kita memahami kalimat pernyataan selanjutnya perlu kita pahami kaliamt terbuka dalam mateamtika. Perhatikan contoh dibawah ini:

1. 9 dikurangi suatu bilangan hasilnya adalah 5
2. $3x - 5 = 4$

Berdasarkan contoh di atas kita belum bisa menentukan apakah contoh 1 dan 2 bernilai betul atau salah. Oleh karena itu kaliat terbuka adalah kalimat yang belum bisaditentukan benar atau salahnya.

Kalimat terbuka pada conoth 2 dihubungkan oleh tanda sama dengan (=). Selanjutnya, kalimat terbuka yang dihubungkan oleh tanda sama dengan (=) disebut persamaan.

Perhatikan kalimat terbuka $3x – 5 = 4$, dimana x adalah variabel. Persamaan dengan satu variabel berpangkat satu atau berderajat satu disebut peramaan linear satu variabel.

Jika x pada persamaan $3x – 5 = 4$ diganti dengan $x = 3$ maka persamaan tersebut bernilai benar. Adapun jika x diganti bilangan selain 3 maka persamaan $3x – 5 = 4$ bernilai salah. Dalam hal ini, nilai $x = 3$ disebut penyelesaian dari persamaan linear $3x - 5 = 4$. Selanjutnya, himpunan penyelesaian dari persamaan $3x - 5 = 4$ adalah (4).

Persamaan linear satu variabel adalah kalimat terbuka yang dihubungkan oleh tanda sama dengan (=) dan hanya mempunyai satu variabel berpangkat satu.

Ilustrasi

Abdullah membeli pensil sebanyak 20 buah.

a. Sesampai di rumah, adiknya meminta beberapa pensil, ternyata pensilnya sisa 17 buah, berapa pensil yang diminta adiknya ?
b. Jika Abdullah membutuhkan 8 pensil, dan sisanya dibagikan rata kepada keempat adiknya. Berapa pensil yang diterima oleh masing- masing adiknya ?

Pada masalah di atas :

a. Jika banyak pensil yang diminta oleh adik Abdullah dimisalkan x buah, maka diperoleh kalimat : $20 - x = 17$
    1. Manakah variabel atau peubah pada kalimat itu ?

2. Ada berapa variabelnya ?
3. Apakah $20 - x = 17$ merupakan kalimat terbuka ?
4. Pada kalimat $20 - x = 17$ mengunakan tanda hubung " = "
5. Pada kalimat $20 - x = 17$ pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu.

Kalimat terbuka yang menggunakan tanda hubung " = " disebut persamaan. Jika pangkat tertinggi dari variabel suatu persamaan adalah satu maka persamaan itu disebut persamaan linear. Persamaan linear yang hanya memuat satu variabel disebut persamaan linear satu variabel (PLSV). Jadi $20 - x = 17$ merupakan salah satu contoh PLSV

b. Jika banyak pensil yang diperoleh masing-masing adik Abdullah dimisalkan n, maka diperoleh persamaan $8 + 4n = 20$
   1. Jika n diganti dengan 5, maka kalimat itu menjadi : $8 + 4(5) = 20$ dan bernilai salah

2. Jika n diganti dengan 3, maka kalimat itu menjadi : $8 + 4(3) = 20$ dan bernilai benar, Pengganti n supaya $8 + 4n = 20$ menjadi benar adalah 3.

Pengganti dari variabel (peubah) sehingga persaman menjadi benar disebut Penyelesaian persamaan, sedangkan himpunan yang memuat semua penyelesaian disebut himpunan penyelesaian

Menyelesaikan Persamaan Linear Satu Variabel

Bentuk umum dari persamaan linear satu variabel adalah $ax + b = c$ dengan $a \neq 0$. Menyelesaikan persamaan, sama artinya dengan menentukan pengganti variabel sehingga persamaan menjadi bernilai benar. Untuk menentukan penyelesaian persamaan yang setara, yaitu kedua ruas ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan yang sama.

Contoh

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x – 8 = 4$
2. Tentukan himpunan penyelesaian $4x + 9 = 3x + 7$.

3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $6x - 4 = 3x + 5$, jika x variabel pada himpunan bilang bulat!
4. Tentukan himpunan penyelesain dari persamaan $12 - 3x = 2x - 8$!

Pembahasan

1. $2x - 8 = 4$

   $2x = 4 + 8$

   $2x = 12$

   $x = 6$

2. $4x + 9 = 3x + 7$

   $4x + 9 - 9 = 3x + 7 - 9$ (Tiap ruas dikurangi 9)

   $4x = 3x - 2$

   $4x - 3x = 3x - 3x - 2$ (Tiap ruas dikurangi 3x)

   $x = -2$

   $HP = \{-2\}$

3. $6x - 4 = 3x + 5$

   $6x - 4 + 4 = 3x + 5 + 4$ (kedua ruas ditambah 4)

   $6x = 3x + 9$

   $6x - 3x = 3x - 3x + 9$ (kedua ruas dikurangi 3x)

3x = 9

(3x). $\frac{1}{3} = (9). \frac{1}{3}$ (kedua ruas dikalikan $\frac{1}{3}$)

Jadi, himpunan penyelesaiannya {3}

4. 12 – 3x – 12 = 2x – 8 – 12 (kedua ruas dikurangi 12)

   -3x = 2x – 20

   -3x – 2x = 2x – 20 - 2x (kedua ruas dikurangi 2x)

   -5x = - 20

   $\left(-\frac{1}{5}\right) - 5x = -20 \left(-\frac{1}{5}\right)$ (kedua ruas dikalikan $-\frac{1}{5}$)

   $x = 4$

   Jadi, himpunan penyelesaiannya (4)

Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan 3x + 13 = 5 – x , untuk x variabel pada himpunan bilangan bulat
2. Budi membeli 20 permen di warung yang ada di dekat rumahnya. Ketika sudah di rumah, adik-adiknya (Iwan, Wayan, dan Wati) meminta permen tersebut sehingga

permen Budi tersisa 11 biji. Berapa banyak permen yang diminta oleh ketiga adiknya Budi?

3. Diketahui harga sepasang sepatu dua kali harga sepasang sandal. Seorang pedagang membeli 4 pasang sepatu dan 3 pasang sandal. Pedagang tersebut harus membayar Rp275.000,00.
   a. Buat model matematika dari keterangan di atas.
   b. Selesaikan model matematika tersebut. Kemudian, tentukan harga 3 pasang sepatu dan 5 pasang sandal.
4. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut
   a. $2y + 5 = -3y + 7$; $x \in Q$ (Q himpunan bilangan rasional)
   b. $3x + 2 = 8$
   c. $2(3x + 6) = 3(x - 2)$
5. Nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{5x+2}{3} - \frac{3x-2}{4} = 1$ adalah…
6. Penyelesaian dari $\frac{3}{4}\left(8x - \frac{20}{3}\right) = \frac{2}{3}(3x + 9)$ adalah…

7. Tentukan penyelesaian persamaan berikut menggunakan sifat keekuivalenan, lalu gambarlah grafik penyelesaiannya.
   a. $2x + 3 = 7$
   b. $\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{5}} = \frac{\boldsymbol{2x-8}}{\boldsymbol{6}}$

2. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Pengertian Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Dalam kehidupan sehari-hari, tentu kalian pernah menjumpai atau menemukan kalimat-kalimat seperti berikut.

a. Berat badan Asti lebih dari 52 kg.
b. Tinggi badan Amri 7 cm kurang dari tinggi Andi.
c. Salah satu syarat menjadi anggota TNI adalah tinggi badannya tidak kurang dari 165 cm.
d. Sebuah bus dapat mengangkut tidak lebih dari 55 orang.

Agar kita dapat memahami pengertian ketidaksamaan, coba kita ingat kembali materi di sekolah dasar mengenai penulisan notasi $<, >, \leq, \geq$ $\boldsymbol{dan} \neq$

a. 3 kurang dari 5 ditulis $3 < 5$.

b. 8 lebih dari 4 ditulis $8 > 4$.

c. x tidak lebih dari 9 ditulis $x \leq 9$.

d. dua kali y tidak kurang dari 16 ditulis $2y \geq 16$.

Kalimat-kalimat $3 < 5$, $8 > 4$, $x \leq 9$, dan $2y \geq 16$ disebut ketidaksamaan. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut. Suatu ketidaksamaan selalu ditandai dengan salah satu tanda hubung berikut.

"$>$" untuk menyatakan lebih dari.

"$\leq$" untuk menyatakan tidak lebih dari atau kurang dari atau sama dengan.

"$\geq$" untuk menyatakan tidak kurang dari atau lebih dari atau sama dengan.

Dibagian depan telah kita pelajari bahwa suatu persamaan selalu ditandai dengan tanda hubung "$=$". Pada bagian ini akan dibahas ciri suatu pertidaksamaan. Perhatikan kalimat terbuka berikut.

a. $6x < 18$

b. $p + 2 \leq 5$

c. $3p - 2 > p$

d. $3x - 1 \geq 2x + 4$

Kalimat terbuka di atas menyatakan hubungan ketidaksamaan. Hal ini ditunjukkan adanya tanda hubung $<, >, \leq$, atau $\geq$. Pada kalimat (a) dan (d) di atas masing-masing mempunyai satu variabel yaitu x yang berpangkat satu (linear). Adapun pada kalimat (b) dan (c) mempunyai satu variabel berpangkat satu, yaitu p. Jadi, kalimat terbuka di atas menyatakan suatu pertidaksamaan yang mempunyai satu variabel dan berpangkat satu. Dengan demikian Pertidaksamaan linear satu variabel adalah pertidaksamaan yang hanya mempunyai satu variabel dan berpangkat satu (linear) yang ditandai dengan tanda ketidaksamaan.

Contoh

Dari bentuk-bentuk berikut, tentukan yang merupakan pertidaksamaan linear satu variabel.

a. $x - 3 < 5$

b. $a \leq 1 - 2b$

c. $x^2 - 3x \geq 4$

Penyelesaian

a. $x - 3 < 5$

Pertidaksamaan $x - 3 < 5$ mempunyai satu variabel, yaitu x dan berpangkat 1, sehingga $x - 3 < 5$ merupakan pertidaksamaan linear satu variabel.

b. $a \leq 1 - 2b$

Pertidaksamaan $a \leq 1 - 2b$ mempunyai dua variabel, yaitu a dan b yang masing-masing berpangkat 1. Dengan demikian a 1 – 2b bukan suatu pertidaksamaan linear satu variabel.

c. $x^2 - 3x \geq 4$

Karena pertidaksamaan x2 – 3x 4 mempunyai variabel x dan x memiliki pangkat dua, maka $x^2 - 3x \geq 4$ bukan merupakan pertidaksamaan linear satu variabel.

Latihan

1) Sisipkan lambang >, =, atau < di antara pasangan bilangan di bawah ini sehingga menjadi pernyataan yang benar.

a. 3 ... –8

b. –2 ... –4

c. 16 ... 42

d. 3/4...1/2

e. 0,1 ... 0,5

2) Tulislah kalimat berikut dalam bentuk ketidaksamaan.

a. 9 kurang dari 13

b. 3 terletak antara –2 dan 5

c. m lebih dari 4

d. y tidak kurang dari 50

e. n tidak lebih dari 45

f. l paling sedikit 72

3) Tulislah kalimat berikut dalam bentuk ketidaksamaan.

a. Jumlah x dan 4 kurang dari 6.

b. Hasil pengurangan p dari 9 lebih dari–6.

c. 3 dikurangkan dari y hasilnya tidak kurang dari 2.

d. Hasil kali 5 dan x kurang dari atau sama dengan 12

Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Pada bagian depan telah dibahas cara menyelesaikan persamaan linear satu variabel, salah satunya dengan substitusi (penggantian). Hal ini juga berlaku pada pertidaksamaan linear satu variabel.

Perhatikan pertidaksamaan $10 - 3x > 2$, dengan x variabel pada himpunan bilangan asli.

Jika x diganti 1 maka $10 - 3x > 2$

$10 - 3 \times 1 > 2$

$7 > 2$ (pernyataan benar)

Jika x diganti 2 maka $10 - 3x > 2$

$10 - 3 \times 2 > 2$

$4 > 2$ (pernyataan benar)

Jika x diganti 3 maka $10 - 3x > 2$

$10 - 3 \times 3 > 2$

$1 > 2$ (pernyataan salah)

Jika x diganti 4 maka $10 - 3x > 2$

$10 - 3 \times 4 > 2$

$-2 > 2$ (pernyataan salah)

Ternyata $x = 1$ dan $x = 2$, dari pertidaksamaan $10 - 3x > 2$

menjadi kalimat yang benar. Jadi, himpunan penyelesaian dari $10 - 3x > 2$ adalah { 1,2 }.

Secara umum dapat dituliskan bahwa pengganti variabel dari suatu pertidaksamaan, sehingga menjadi pernyataan yang benar disebut penyelesaian dari pertidaksamaan linear satu variabel.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $4x - 2 > 3x + 5$ dengan x variabel pada himpunan bilangan cacah.

Penyelesaian:

Cara 1

Dengan mengganti tanda "$>$" dengan "$=$" diperoleh persamaan $4x - 2 = 3x + 5$. Dengan cara menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh penyelesaiannya adalah $x = 7$. Selanjutnya ambillah satu bilangan cacah yang kurang dari 7 dan lebih dari 7.Periksalah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $4x - 2 > 3x + 5$.

Jika x diganti 6 maka $4(6) - 2 > 3(6) + 5$

$22 > 23$ (bernilai salah)

Jika x diganti 8 maka $4 \times 8 - 2 > 3 \times 8 + 5$

$30 > 29$ (bernilai benar)

Karena nilai x yang memenuhi adalah lebih besar dari 7, maka himpunan penyelesaian dari $4x - 2 > 3x + 5$ adalah { 8, 9, 10,...}

Cara 2

$4x - 2 > 3x + 5$

$4x - 2 + 2 > 3x + 5 + 2$ (kedua ruas ditambah 2)

$4x > 3x + 7$

$4x + (-3x) > 3x + (-3x) + 7$ (kedua ruas ditambah $-3x$)

$x > 7$

Karena x variabel pada himpunan bilangan cacah maka himpunan penyelesaiannya adalah {8, 9, 10, ...}.

Cara 3

$4x - 2 > 3x + 5$

$4x - 2 - 5 > 3x + 5 - 5$ (kedua ruas dikurangi 5)

$4x - 7 > 3x$

$4x + (-4x) - 7 > 3x + (-4x)$ (kedua ruas ditambah $-4x$)

$-7 > -x$

$-7 : (-1) < -x : (-1)$ (kedua ruas dibagi dengan -1 tetapi tanda ketidaksamaan berubah menjadi $<$)

$7 < x$ atau $x > 7$

Karena x anggota bilangan cacah maka himpunan penyelesaiannya adalah $\{8, 9, 10, ...\}$.

Berdasarkan contoh di atas, untuk menentukan penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel, dapat dilakukan dalam dua cara sebagai berikut.

a. Mencari lebih dahulu penyelesaian persamaan yang diperoleh dari pertidaksamaan dengan mengganti tanda ketidaksamaan dengan tanda "=".
b. Menyatakan ke dalam pertidaksamaan yang ekuivalen. Dari uraian tersebut dapat disimpulkan sebagai berikut.

Suatu pertidaksamaan dapat dinyatakan ke dalam pertidaksamaan yang ekuivalen dengan cara sebagai berikut.

1. Menambah atau mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama tanpa mengubah tanda

ketidaksamaan.

2. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan positif yang sama tanpa mengubah tanda ketidaksamaan.
3. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama, tetapi tanda ketidaksamaan berubah, dimana
   1) $>$ menjadi $<$
   2) $\geq$ menjadi $\leq$
   3) $<$ menjadi $>$
   4) $\leq$ menjadi $\geq$

Latihan

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut jika peubah pada himpunan bilangan cacah.

1) $2x - 1 < 7$
2) $p + 5 \quad 9$
3) $4 - 3q \quad 10$
4) . $4x - 2 > 2x + 5$
5) $2(x - 3) < 3(2x + 1)$
6) $3(2t - 1) \quad 2t + 9$

7) $2(x - 30) < 4(x - 2)$

8) $6 - 2(y - 3) \;\; 3(2y - 4)$

Grafik Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Grafik himpunan penyelesaian persamaan linear satu variabel ditunjukkan pada suatu garis bilangan, yaitu berupa noktah (titik). Demikian halnya pada pertidaksamaan linear satu variabel.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $4x - 2 \leq 5 + 3x$, untuk x variabel pada himpunan bilangan asli. Kemudian, gambarlah grafik himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian

$4x - 2 \leq 5 + 3x$

$4x - 2 + 2 \leq 5 + 3x + 2$ (kedua ruas ditambah 2)

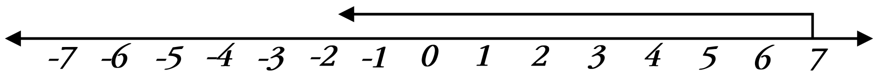
$4x \leq 3x + 7$

$4x + (-3x) \leq 3x + (-3x) + 7$ (kedua ruas ditambah $(-3x)$)

$x \leq 7$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$.

Garis bilangan yang menunjukkan himpunan penyelesaiannya sebagai berikut.



Soal latihan

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut, kemudian gambarlah grafik himpunan penyelesaiannya, jika peubah pada himpunan bilangan bulat.

1) $2(x-3) < 4(x-2)$
2) $-2 \leq x+3 \leq 5$
3) $4(y-5) < 2(4-3y)+2$
4) $4x-2 < 2x+5$
5) $7y > 5y+4$

Membuat Model Matematika dan Menyelesaikan Soal Cerita

Secara umum dalam mempelajari persamaan linier seringkali kita dihadapkan pada persoalan kehidupan sehari-hari dalam bentuk soal cerita.

Contoh

Suatu model kerangka balok terbuat dari kawat dengan ukuran panjang (x+ 5) cm, lebar (x – 2) cm, dan tinggi x cm.

a. Buatlah model matematika dari persamaan di atas dengan panjang kawat yang diperlukan dalam x.
b. Jika panjang kawat yang digunakan seluruhnya tidak lebih dari 132 cm, tentukan ukuran maksimum balok tersebut.

Penyelesaian:

a. Misalkan panjang kawat yang diperlukan = K, maka model matematikanya sebagai berikut

$$K = 4p + 4l + 4t$$
$$= 4(x + 5) + 4(x - 2) + 4 \text{ X } x$$
$$= 4x + 20 + 4x - 8 + 4x$$
$$= 12x + 12$$

b. Panjang kawat tidak lebih dari 132 cm dapat ditulis K = $12x + 12 \leq 132$ cm, sehingga diperoleh

$$12x + 12 \leq 132$$
$$12x \leq 132 - 12$$

$12x \leq 120$

$x \leq \frac{\mathbf{120}}{\mathbf{12}}$

$x \leq 10$

Nilai maksimum x = 10 cm, sehingga diperoleh

P = (x + 5) cm = 15 cm

t = (x – 2) cm = 18 cm

t = x = 10 cm.

Jadi, ukuran maksimum balok adalah (15 x 8 x 10).

Latihan

1. Persegi panjang mempunyai panjang $(x + 7)$ cm dan lebar $(x – 2)$ cm. Jika kelilingnya tidak lebih dari 50 cm, tentukan luas maksimum persegi panjang tersebut.
2. Panjang diagonal-diagonal suatu layanglayang adalah $(2x - 3)$ cm dan $(x + 7)$ cm. Jika diagonal pertama lebih panjang dari diagonal kedua, tentukan luas minimum layang-layang tersebut.

3. Model kerangka kubus dibuat dari kawat yang panjang rusuknya $(x + 2)$ cm. Jika panjang kawat yang diperlukan tidak melebihi 180 cm, tentukan panjang rusuk kubus tersebut.
4. Panjang diagonal-diagonal suatu jajargenjang diketahui berturut-turut $(3x – 5)$ cm dan $(x + 7)$ cm. Jika diagonal pertama lebih panjang dari diagonal kedua, susunlah pertidaksamaan yang memenuhi dan selesaikanlah.
5. Suatu lempeng logam berbentuk segitiga dengan panjang sisi-sisinya $3a$ cm, $4a$ cm, dan $5a$ cm. Jika kelilingnya tidak kurang dari 72 cm, tentukan ukuran minimum segitiga tersebut

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Linier Dua Veriabel

1. Persamaan Linier Dua variabel

Pengertian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV)

Kebiasaan mengonsumsi suatu barang memang sudah terkenal menjadi kebiasaan bangsa Indonesia. Namun alangkah baiknya jika mengonsumsi suatu barang yang bermanfaat. Ami dan Irsyad bersama-sama belanja dipusat perbelanjaan Pancor. Rofi membeli 6 kemeja dan 4 kaos untuk dijual kembali kepada teman-temannya dengan berharap mendapat laba. Ami harus membayar Rp. 590.000,00 untuk barang yang dibelinya itu. Sementara itu, Irsyad membeli 3 kemeja dan 3 kaos untuk diberikan kepada saudaranya, dengan harga Rp. 345.000,00. Dapatkah kita menentukan harga satuan dari kemeja dan kaos dari informasi tersebut.

Informasi di atas merupakan salah satu contoh permasalahn sistem persamaan linear dua variabel, dimana dalam permasalahan di atas terdapat dua jenis barang yang akan dibeli sehingga yakni kemeja dan kaos sehingga dapat dikatakan bahwa dua jenis barang tersebut dikatakan sebagai variabel dalam bentuk matematika.

Contoh

1. $\boldsymbol{3x - 2y = 10}$ (merupakan persamaan linear dua variabel karena memuat variabel *x, y* dan juga memiliki pangkat tertinggi satu)
2. $\boldsymbol{-4p - 2q = 3}$ (merupakan persamaan linear dua variabel karena memuat variabel *p, q* dan juga memiliki pangkat tertinggi satu)
3. $\boldsymbol{x^2 - 2y = 5}$ (bukan persamaan linear dua variabel karena pangkat tertinggin pada salah satu variabel adalah dua)
4. $\boldsymbol{3x - 2y + 5z = 10}$ (bukan persamaan linear dua variabel karena terdapat variabel *x, y* dan *z*)

Bentuk umum dari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dapat ditulis sebagai : $\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{px + qy = r} \end{cases}$

Dalam sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) di atas *a, b, p* dan *q* di atas disebut koefisien. *x* dan *y* adalah variabel dari sistem persamaan linear dua variabel sedangkan c dan r disebut konstanta. Nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut dinamakan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel. Semua variabel, koefisien dan konstanta dalam sistem persamaan linear dua variabel merupakan bilangan real.

Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV)

a. Metode grafik

Ketika menggunakan metode grafik, kalian harus menggambar masing-masing persamaan linear dua variabel tersebut dalam kooordinat kartesius. Himounan penyelesaiannya adalah titik potong dari kedua garis. Jika garisnya tidak berpotongan atau sejajar maka himpunan penyelesaiannya adlah himpunan kosong. Namun demikian, jika garisnya berhimpit maka jumlah himpunan penyelesaiannya tak berhingga.

Langkah-langkah menyelesaikan persamaan linear dua varibel dengan metode grafik :

1) Gambarkan grafik dari masing-masing persamaan dengan cermat.
2) Tentukan titik potong kedua grafik tersebut . titik potong ini merupakan penyelesaian system persamaan linear dua variabel.

Contoh

Tentukan penyelesaian system persamaan linear $2x + 3y = 6$ dan $3x - y = -2$ dengan metode grafik !

Penyelesaian

2. Menentukan titik potong sumbu x dan y dari persamaan $2x + 3y = 6$

   Titik potong sumbu x di dapat jikah $y = 0$

   $2x + 3y = 6$

   $2x + 3(0) = 6$

   $2x = 6$

   $x = 3$

   Jadi titik potongnya adalah (3,0)

   Titik potong sumbu y di dapat jikah $x = 0$

   $2x + 3y = 6$

   $2(0) + 3y = 6$

3y = 6

y = 2

Jadi titik potongnya adalah (0,2)

3. Menentukan titik potong sumbu x dan y dari persamaan $3x$ - y = -2

   Titik potong sumbu x di dapat jikah y = 0

   3x - y = -2

   3x - 0 = -2

   3x = -2

   $$\boldsymbol{x = \frac{-2}{3}}$$

   Jadi titik potongnya adalah ($\frac{-2}{3}$,0)

   Titik potong sumbu y di dapat jikah x = 0

   3x - y = -2

   3(0) - y = -2

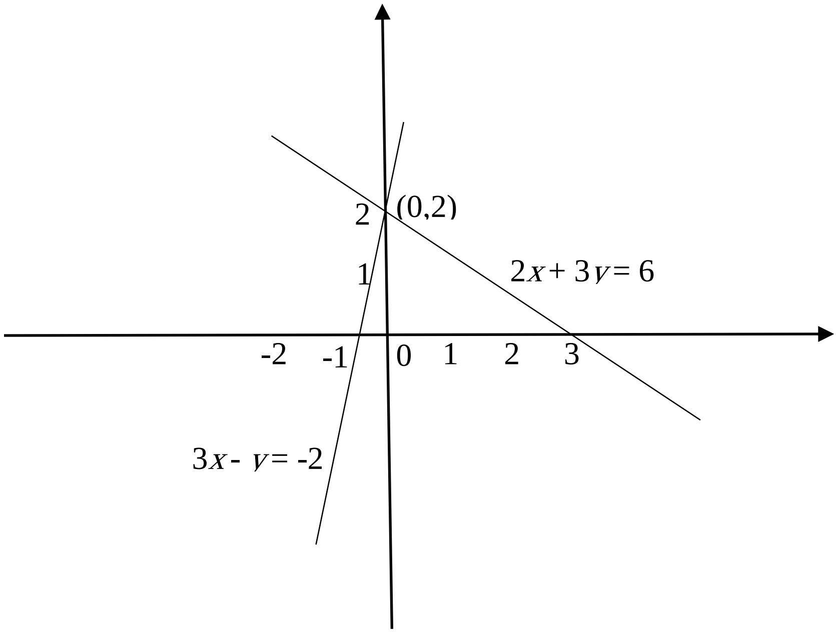
   -y = -2

   y = 2

   Jadi titik potongnya adalah (0,2)

4. Menggambar grafik

   Gambarlah gerafik dari masing-masing persamaan di atas pada koordinat kartesius



5. Kedua garis tersebut berpotongan di titik $(0,2)$

   Jadi titik $(0,2)$ adalah satu-satunya penyelesaian dari system persamaan linear dua peubah tersebut. Atau dengan kata lain $(0,2)$ merupakan akar dari system persamaan linear dua variabel.

b. Metode substitusi

Substitusi artinya mengganti, yaitu menggantikan variabel yang kita pilih pada persamaan pertama dan digunakan untuk mengganti variabel sejenis pada persamaan kedua.

Substitusi merupakan proses penyelesaian sebuah persamaan dengan cara menyatakan salah satu variabel ke dalam variabel yang lain pada persamaan pertama dan memasukkannya ke dalam persamaan kedua untuk mendapatkan nilai variabelnya. Jadi, bisa dikatakan bahwa metode substitusi sama artinya dengan mengganti.

Langkah-langkah Menyelesaikan SPLDV dengan metode substitusi :

1. Pilihlah satu persamaan (pilihlah persamaan yang sederhana jika ada), kemudian nyatakan salah satu variabel persamaan itu kedalam persamaan yang lain.
2. Substitusikan persamaan itu ke persamaan yang lain.

Contoh

Selesaikan system persamaan linear $\begin{cases} \boldsymbol{3x+2y=12} \\ \boldsymbol{2x+y=7} \end{cases}$ dengan metode substitusi!

Pembahasan

Menentukan nilai salah satu variabel dari Persamaan pertama 3x + 2y = 12

$3x + 2y = 12$

$3x = 12 - 2y$

$$\boldsymbol{x = \frac{12-2y}{3}}$$

Masukkan nilai $\boldsymbol{x = \frac{12-2y}{3}}$ ke persamaan kedua

$2x + y = 7$

$$\boldsymbol{2\left(\frac{12-2y}{3}\right) + y = 7}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{24-4y}{3}\right) + \frac{3y}{3} = 7}$$

$$\boldsymbol{\frac{24-y}{3} = 7}$$

$24 - y = 21$

$-y = 21 - 24$

$-y = -3$

$y = 3$

Masukan nilai $y = 3$ ke persamaan pertama $3x + 2y = 12$

$3x + 2(3) = 12$

$3x + 6 = 12$

$3x = 12 - 6$

$3x = 6$

$x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{(\mathbf{2}, \mathbf{3})\}$

c. Metode eliminasi

Untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLDV, caranya adalah dengan menghilangkan (mengeliminasi) salah satu variabel dari system persamaan tersebut. Jika variabelnya x dan y, untuk menentukan variabel x kita harus mengeliminasi variabel y terlebih dahulu, atau sebaliknya.

Eliminisai merupakan proses menggabungkan persamaan untuk menghilangkan salah satu variabel sehingga lebih mudah dikerjakan dan mendapatkan nilai dari variabel yang lain.

Perhatikan bahwa jika koefisien dari salah satu variabel sama maka kita dapat mengeliminasi (menghilangkan) salah satu variabel tersebut, untuk selanjutnya menentukan variabel yang lain.

Langkah-langkah Menyelesaikan SPLDV dengan metode eliminasi :

1. Mengeliminasi (menghilangkan) varibel x untuk menentukan variabel y
2. Mengeliminasi varibel y untuk menentukan nilai x

Contoh

Selesaikan system persamaan linear $\begin{cases} \mathbf{3x+2y=12} \\ \mathbf{2x+y=7} \end{cases}$ dengan metode eliminasi !

Pembahasan

Hilangkan salah satu variabel dari kedua persamaan yaitu

$3x + 2y = 12$

$2x + y \ = 7$

Hilangkan variabel x dengan menyamakan koefisien dari variabel x

$3x + 2y = 12$ x 2

$2x + y = 7$ x 3

Didapat

$6x + 4y = 24$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ \hline y = 3 \end{array} -$$

Selanjutnya menghilangkan variabel y dengan menyamakan konstsnta pada variabel y yaitu

$3x + 2y = 12$

$2x + y = 7$

Hilangkan variabel x dengan menyamakan koefisien dari variabel x

$3x + 2y = 12$ x 1

$2x + y = 7$ x 2

Didapat

$3x + 2y = 12$

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 14 \\ \hline -x = -2 \end{array} -$$

$x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{(\mathbf{2}, \mathbf{3})\}$

d. Metode campuran

Seringkali dalam menyelesaikan SPLDV digunakan metode eliminasi dan substitusi secara bersamaan. Cara ini biasanya disebut metode campuran atau gabungan. Metode campuran ini lebih efisien waktu daripada harus menggunakan metode elminasi untuk mencari nilai kedua variabel. Setelah diproses salah satu nilai variabel dengan metode eliminasi, maka selanjutnya menggunakan metode substitusi untuk mendapatkan nilai varibel yang lain.

Keempat metode di atas menghasilkan penyelesaian yang sama. Ini berarti kita dapat memilih salah satu metode yang paling mudah dan lebih efisien waktu dalam menyelesaikan SPLDV.

Contoh

Selesaikan system persamaan linear $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 12} \\ \mathbf{2x + y = 7} \end{cases}$ dengan metode eliminasi !

Pembahasan

Hilangkan salah satu variabel dari kedua persamaan yaitu

$3x + 2y = 12$

$2x + y \ = 7$

Hilangkan variabel x dengan menyamakan koefisien dari variabel x

$3x + 2y = 12$ x 2

$2x + y = 7$ x 3

Didapat

$6x + 4y = 24$

$\underline{6x + 3y = 21}$ –

$y = 3$

Masukan nilai $y = 3$ ke persamaan pertama $3x + 2y = 12$

$3x + 2(3) = 12$

$3x + 6 = 12$

$3x = 12 - 6$

$3x = 6$

$x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{(\mathbf{2}, \mathbf{3})\}$

Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} \boldsymbol{6p - q = 1} \\ \boldsymbol{4p - 3q + 4 = 0} \end{cases}$ dengan menggunakan metode grafik, subtitusi dan eliminasi.
2. Harga 6 ekor kambing dan 4 ekor sapi adalah Rp. 19.600.000,00. Harga 8 ekor kambing dan 3 ekor sapi adalah Rp. 16.800.000,00 . berapa harga 1 ekor kambing dan 1 ekor sapi ?
3. Ami membeli 4 buah buku dan 5 buah bolpoin seharga Rp. 24.000,00. Rofi membeli 6 buah buku dan 2 buah bolpoin seharaga Rp. 27.200,00 . tentukan harga 2 buah buku dan 5 bolpoin !
4. Dua buah sudut dari suatu segitiga saling berkomplemen. Sudut yang satu 80 lebih besar dari sudut yang lain. Tentukan besar ketiga sudut dari segitiga tersebut !
5. Harga satu dan satu celana adalah Rp. 130.000,00 sedamgkan harga dua potong kaos dan satu potong celana adalah Rp. 130.000,00. Tentukanlah :
   a. Model matematika dari soal tersebut

b. Harga satuan kaos dan celana
c. Harga 4 potong kaos dan 2 celana

6. Sebidang tanah memiliki ukuran panjang 8 meter lebih panjang dari pada lebarnya. Jika keliling sebidang tanah tersebut adalah 44 m^2. Tentukanlah :
   a. Model matematika dari soal tersebut
   b. Ukuran panjang dan lebar sebidang tanah tersebut
   c. Luas bidang tanah tersebut
   d. Jika tanah tersebut dijual Rp. 100.000,00 per meter persegi, berapakah harga jual sebidang tanah tersebut ?
7. Harga 3 pensil dan 2 buku tulis adalah Rp. 5.100,00 sedangkan harga 2 pensil dan 4 buku tulis adalah Rp. 7.400,00. Tentukanlah :
   a. Model matematika dari soal tersebut
   b. Harga satuan pensil dan buku
   c. Harga 10 buah pensil dan dua buku tulis

2. Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

Pengertian Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda ketidaksamaan (<, ≤; >, atau ≥) dan mengandung variabel. Sistem pertidaksamaan tersusun atas pertidaksamaan-pertidaksamaan linear. Dan pertidaksamaan-pertidaksamaan nantinya berfungsi sebagai pembatas atau kendala. Dimana masing-masing pertidaksamaan tersebut memiliki atau memuat dua variabel dan pangkat tertinggi dari variabel- variabel itu adalah satu. Perhatikan pertidaksamaan berikut:

(i) $x + y \leq 60$

(ii) $4x + y \leq 90$

Bila variabel x dan y pada pertidaksamaan (i) dan (ii) di atas ada keterkaitan, maka dua pertidaksamaan linear dua variabel tersebut dinamakan sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

5. Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Menyelesaikan suatu pertidaksamaan berarti berarti menentukan semua nilai pengganti variabel yang menyebabkan pertidaksamaan tersebut bernilai benar, dimana nilai-nilai ini disebut dengan penyelesaian atau akar dari pertidaksamaan. Kita kan menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel menggunakan metode grafik.

Metode grafik dimaksudkan untuk melihat dan menggambarkan secara visual gambaran tentang daerah penyelesaian dari petidaksamaan linear yang berbentuk aljabar. Secara umum, grafik pertidaksamaan linear seperti $ax + by > c$, $ax + by \geq c$, $ax + by < c$, dan $ax + by \leq c$ berupa daerah yang dibatasi oleh $ax + by = c$.

Langkah-langkah dalam menggambar grafik bentuk pertidaksamaan linear adalah sebagai berikut:

a. Menggambar grafik garis $ax + by = c$ sebagai batas daerahnya
b. Menyelidiki daerah penyelesaian yang dimaksud apakah berada disebelah kiri, sebelah kanan, di atas, atau di bawah garis batas yang telah dilukis.

Hal yang harus diingat dalam menggambar grafik sebuah grafik fungsi adalah menentukan minimal dua titik sebarang pada garis itu. Kemudian menghubungkannya dengan sebuah garis lurus. Dua titik yang mudah perhitungannya adalah $ax + by + c$ dengan sumbu x dan titik potong garis pada sumbu y. Titik potong dengan sumbu x memiliki bentuk (..., 0), yakni dicapai saat nilai $y = 0$. Adapun titik potong dengan sumbu y mempunyai bentuk (0, ...) yang dicapai saat nilai $x = 0$.

Berdasarkan uraian di atas maka untuk menggambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear adalah sebagai berikut:

a. Gambarlah grafik lurus pembatasnya dengan menisi format berikut:

x	*0*	…
y	…	*0*
(x, y)	*(0, …)*	*(…, 0)*

b. Menyelidiki daerah yang merupakan penyelesaian dengan mengambil salah satu titik yang mudah misalnya $O(0, 0)$.

Contoh

Gambarlah daerah himpunan penyelesaian persamaan linear berikut pada bidang cartesius.

a. $3x + 2y \geq 6$, dengan $x, y \in R$

b. $2x + y > -4$, dengan $x, y \in R$

Pembahasan

a. $3x + 2y \geq 6$, dengan $x, y \in R$

Untuk menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear tersebut, perhatikan langkah-langkah berikut:

1. Menggambar grafik garis lurus pembatasnya

Titik potong sumbu x didapat jika $y = 0$

$3x + 2y = 6$

$3x + 2(0) = 6$

$3x = 6$

$x = 2$

Jadi titik potong grafik dengan sumbu x adalah $(2, 0)$

Titik potong sumbu y didapat jika x = 0

$3x + 2y = 6$

$3(0) + 2y = 6$

$2y = 6$

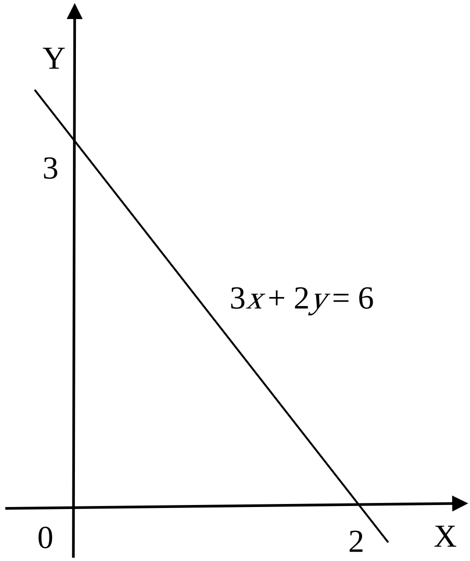
$y = 3$

Jadi titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, 3).

Hal tersebut dapat disajikan dengan tabel berikut:

x	0	2
y	3	0
(x, y)	$(0, 3)$	$(2, 0)$

Grafik $3x + 2y = 6$ dapat diperoleh dengan membuat garis yang menghubungkan koordinat (0, 3) dan (2, 0) seperti pada gambar dibawah ini



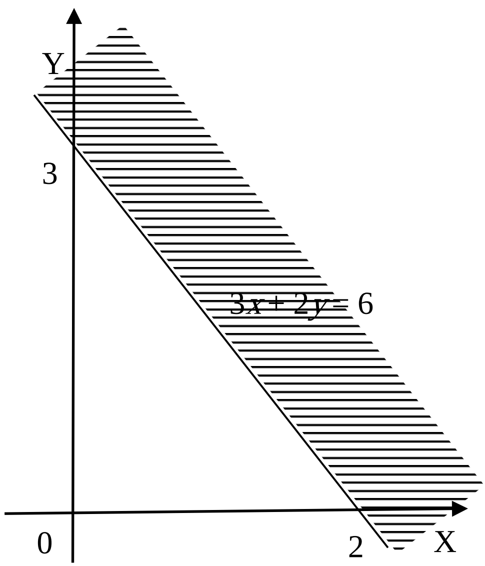
2. Menyelidiki daerah penyelesaian

Gambar di atas merupakan grafik himpunan penyelesaian untuk persamaan $3x + 2y=6$. Tampak bahwa garis $3x + 2y = 6$ membagi bidang cartesius menjadi dua daerah, yaitu atas (kanan) garis dan bawah (kiri) garis. Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian $3x + 2y \geq 6$, ambil sebarang titik, misalnya (0, 0) dan substitusikan ke dalam pertidaksamaan linear $3x + 2y \geq 6$ sehingga diperoleh sebagai berikut:

$3(0) + 2(0) \geq 6$

$0 \geq 6$ (pernyataan salah)

Karena titik (0, 0) terletak di bawah (kiri) garis dan setelah kita substitusikan ketidakpersamaan ke pertidaksamaan itu, diperoleh pernyataan yang salah maka titik (0, 0) tidak berada pada daerah penyelesaian. Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang di beri arsiran seperti pada gambar dibawah ini



b. $2x + y > -4$, dengan $x, y \in R$

Langkah-langkah untuk menentukan daerah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Menggambar grafik garis lurus pembatasnya

   Titik potong sumbu x didapat jika $y = 0$

   $2x + y = -4$

   $2x + (0) = -4$

   $2x = -4$

   $x = -2$

   Jadi titik potong grafik dengan sumbu x adalah (-2, 0)

   Titik potong sumbu y didapat jika x = 0

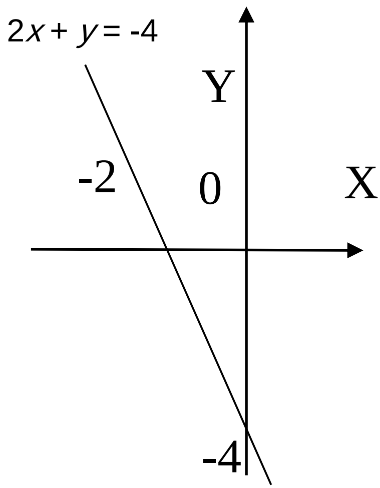
   $2x + y = -4$

   $2(0) + y = -4$

   $y = -4$

   Jadi titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, -4).

   Sehingga titik potong dengan sumbu koordinat adalah (0, -4) dan (-2, 0), gambarnya akan terlihat seperti beikut:



2. Menyelidiki daerah penyelesaian

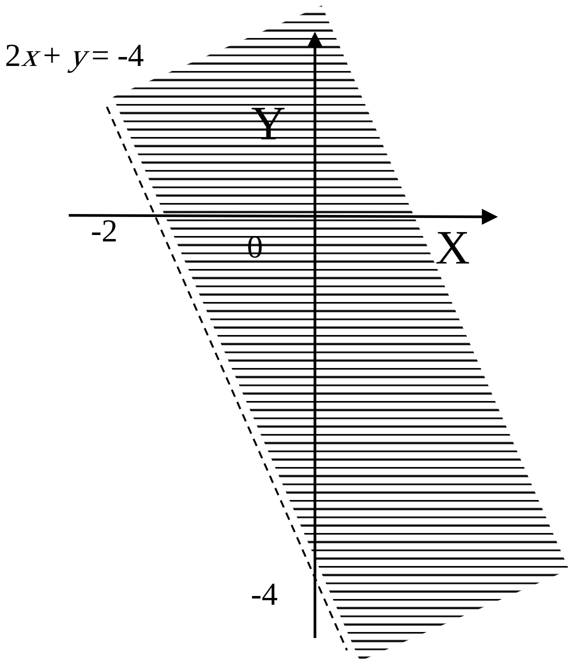
   Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan, kita ambil sebarang titik, yaitu titik (0, 0). Dengan menyubstitusikan titik tersebut pada pertidaksamaan maka diperoleh

   $2(0) + 0 > -4$

   $0 > -4$

   Terlihat bahwa pernyataan $0 > -4$ benar, berarti titik (0, 0) berada pada daerah penyelesaian, sedangkan garis $2x + y = -4$ tidak memenuhi pertidaksamaan sehingga digambar putus-putus. Oleh karena titik

(0, 0) berada di atas garis 2x + y = -4 maka daerah di atas garis diberi arsiran. Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang diarsir, seperti gambar dibawah ini



Latihan

1. Tentukanlah daerah penyelesaian pertidaksamaan linier $2x + y \leq 6$, dengan x dan y anggota real.
2. Tentukanlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linier $5x - 4y \leq -20$ dengan x dan y anggota real
3. Tentukanlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier : $2x + 3y \leq 12$, $x \geq 1$, $y \leq 1$
4. Tentukanlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier ; $2x + y \leq 8$, $4x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
5. Tentukanlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier ; $2x - 3y \geq -6$, $3x + 5y \leq 15$, $y \geq 0$

BAB IV

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

A. Persamaan Kuadrat

1. Pengertian Persamaan Kuadrat

Persamaan Kuadrat adalah suatu persamaan yang variabelnya memiliki pangkat tertinggi dua.

Bentuk Umumnya

$ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ dan $a \neq 0$

Contoh :

a. $2x^2 - 4x + 5 = 0$, dimana $a = 2$, $b = -4$, $c = 5$ (persamaan biasa)

b. $3x^2 + 6 = 0$, dimana $a = 3$, $b = 0$, $c = 6$ (kuadrat sempurna)

c. $3x^2 + 6x = 0$, dimana $a = 3$, $b = 6$, $c = 0$ (persamaan tak lengkap)

2. Menentukan Akar Persamaan Kuadrat

Terdapat 3 cara dalam menyelesaikan akar-akar persamaan kuadrat yaitu:

a. Memfaktorkan

BU. $ax^2 + bx + c = 0$

Langkahnya: tentukan dua buah bilangan yang jika dikalikan sama dengan a dan jika dijumlahkan sama dengan b.

Contoh

Tentukan akar – akar persamaan kuadrat dari $2x^2 + 9x - 35 = 0$

Penyelesaian

$(2x - 5)\ (2x + 14) = 0$

$2x - 5 = 0$ atau $2x + 14 = 0$

$x = \frac{5}{2}$ $\qquad$ $x = -7$

jadi akar persamaan kuadrat dari persamaan $2x^2 + 9x - 35 = 0$ adalah $x = \frac{5}{2}$ dan $x = -7$

b. Rumus ABC

Dirumuskan dengan

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad dengan \quad a \neq 0$$

Contoh

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat dari $2x^2 + 9x - 35 = 0$

Penyelesaian

Diketahui a = 2, b = 9 , c = -35

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(2)(-35)}}{4}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 280}}{4}$$

$$= = \frac{-9 \pm \sqrt{361}}{4} = \frac{-9 \pm 19}{4}$$

$$x_1 = \frac{-9 + 19}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-9 - 19}{4} = -7$$

Jadi akar persamaan kuadrat dari persamaan $2x^2 + 9x - 35 = 0$ adalah $x = \frac{5}{2}$ dan $x = -7$

c. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Langkah – langkahnya sebagai berikut :

- Tambahkan ruas kanan dan kiri dengan lawan c :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c + (-c) = 0 + (-c)$$

- Bagi semua ruas baik kanan maupun kiri dengan a jika $a \neq 1$:

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

- Tambahkan ruas kanan dan kiri dengan $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

- Ubah kebentuk :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \;/$$

difaktorkan

- Pindahkan pangkat ke kanan :

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

Contoh

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat dari $2x^2 + 9x - 35 = 0$

Penyelesaian

$2x^2 + 9x - 35 = 0$

$2x^2 + 9x - 35 + 35 = 0 + 35$

$$x^2 + \frac{9}{2}x = \frac{35}{2}$$

$$x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16} = \frac{35}{2} + \frac{81}{16}$$

$$(x + \frac{9}{4})^2 = \frac{361}{16}$$

$$x + \frac{9}{4} = \pm \frac{19}{4}$$

$x + \frac{9}{4} = \frac{19}{4}$

diperoleh $x = \frac{5}{2}$

untuk yang negatif :

$x + \frac{9}{4} = -\frac{19}{4}$ diperoleh $x = -7$

jadi akar persamaan kuadrat dari persamaan $2x^2 + 9x - 35 = 0$ adalah $x = \frac{5}{2}$ dan $x = -7$

3. Jenis – Jenis Akar Persamaan Kuadrat

a. Dua akar real yang berlainan atau berbeda jika $D > 0$, ada dua jenis antara lain :

   1) Rasional jika D Berbentuk kuadrat sempurna

      Contoh : 1, 4, 9 , ...

   2) Irasional jika D tidak berbentuk kuadrat sempurna

      Contoh : 5, 6 , 10 , ...

b. Dua akar kembar atau sama jika $D = 0$

c. Tidak mempunyai akar real atau imajiner jika $D < 0$

Untuk menentukan D (diskriminan) digunakan rumus :

$D = b^2 - 4ac$; dimana D merupakan diskriminan

Diperoleh dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$

Selain menggunakan diskriminan untuk melihat jenis akar-akar persamaan kuadrat, kita dapat juga melihat dengan menentukan akar-akarnya terlebih dahulu sehingga:

a. Dua akar real yang berlainan / berbeda jika:

1) x_1 dan x_2 nya berbeda dan berbentuk bilangan bulat, negatif, pecahan maka rasional

   contoh : $x_1 = 2$,$x_2 = -3$ atau $x_1 = \frac{-3}{5}$, $x_2 = 3$

2) x_1 dan x_2 nya berbeda dan berbentuk akar positif maka irasional

   contoh : $x_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$,$x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

b. Dua akar kembar atau sama jika $x_1 = x_2$

   Contoh : $x_1 = 2$,$x_2 = 2$

c. Tidak mempunyai akar real atau imajiner jika berbentuk akar negatif

Contoh : $x_1 = \frac{2+\sqrt{-3}}{4}$,$x_2 = \frac{2-\sqrt{-3}}{4}$

Contoh soal 1

Tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat dari $2x^2 + 9x - 35 = 0$

Penyelesaian

Diketahui a = 2, b = 9 , c = -35

Cara 1

$D = b^2 - 4ac = 81 - 4(2)(-35) = 81 + 280 = 361$

Karena D > 0 dan D berbentuk kuadrat sempurna $361 = (19)^2$ maka jenis akarnya dua akar real yang berlainan atau berbeda dan rasional

Cara 2

Dengan rumus ABC seperti contoh 4 maka diperoleh :

$x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -7$

Karena x_1 berbentuk bilangan negatif dan pecahan maka jenis akarnya dua akar real yang berlainan atau berbeda dan rasional.

Contoh soal 2

Tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat dari $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Penyelesaian

Diketahui a = 4, b = -20 , c = 25

Cara 1

$D = b^2 - 4ac = 400 - 4(4)(25) = 400 - 400 = 0$

Karena D = 0 maka jenis akarnya kembar atau sama

Cara 2

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4(4)(25)}}{8}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8}$$

$$= \frac{20 \pm 0}{8}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} \, dan \; x_2 = \frac{5}{2}$$

Karena $x_1 = x_2$ maka jenis akarnya kembar atau sama

Contoh soal 3

Diketahui persamaan kuadrat $x^2 - 6x + 3p = 0$, tentukan nilai atau batas nilai p agar persamaan kuadrat tersebut :

a. Mempunyai dua akar real yang berbeda
b. Mempunyai dua akar real yang kembar
c. Tidak mempunyai akar – akar yang real

Penyelesaian

$x^2 - 6x + 3p = 0$, dengan $a = 1$, $b = -6$, $c = 3p$

nilai diskriminannya adalah : $D = b^2 - 4ac = 36 - 12p$

a. Agar persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang berbeda, syaratnya $D > 0$

   $D > 0$

   $36 - 12p > 0$

   $p < 3$

   jadi persamaan kuadrat $x^2 - 6x + 3p = 0$ mempunyai dua akar real yang berbeda untuk batas nilai $p < 3$

b. Agar persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang sama, syaratnya $D = 0$

   $D = 0$

$36 - 12p = 0$

$p = 3$

jadi persamaan kuadrat $x^2 - 6x + 3p = 0$ mempunyai dua akar real yang sama untuk nilai $p = 3$

c. Agar persamaan kuadrat tidak mempunyai akar – akar real, syaratnya D < 0

$D < 0$

$36 - 12p < 0$

$p > 3$

jadi persamaan kuadrat $x^2 - 6x + 3p = 0$ tidak mempunyai akar – akar yang real untuk batas nilai $p > 3$

4. Jumlah dan Hasil Kali Akar – Akar Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2 maka :

Jumlah Akar Persamaan Kuadrat = $x_1 + x_2$

Hasil Kali Persamaan Kuadrat = $x_1 \times x_2$

Untuk jumlah akar-akar persamaan kuadrat :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Untuk Hasil Kali Akar – akar persamaan kuadrat :

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$\frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Jadi jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$ maka jumlah dan hasil kali akar – akar persamaan kuadrat ditentukan dengan rumus :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ dan } x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $2x^2 + 9x - 35 = 0$, tentukan

a. $x_1 + x_2$

b. $x_1 . x_2$

c. $x_1^4 + x_2^4$

d. $(x_1 - x_2)^2$

e. $x_1^{3} + x_2^{3}$

f. $\frac{x_1}{x_2^{2}} + \frac{x_2}{x_1^{2}}$

Penyelesaian

a. $x_1 + x_2 \quad = \frac{-b}{a} = \frac{-9}{2}$

b. $x_1 \, . \, x_2 \quad = \frac{c}{a} = \frac{-35}{2}$

c. $x_1^{4} + x_2^{4} \quad = \{(x_1 + x_2)^2 - 2\, x_1 \, . \, x_2\}^2 -$

$2(x_1 \, . \, x_2)^2$

$$= \frac{48841}{16} - \frac{1225}{2}$$

$$= \frac{48841 - 9800}{16} = \frac{39041}{16}$$

d. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4 x_1 \, x_2$

$$= \frac{81}{4} + 70 = \frac{361}{4}$$

e. $x_1^{3} + x_2^{3} = (x_1 + x_2)^3 - 3 x_1 \, x_2 \, (x_1 + x_2)$

$$= \frac{-729}{8} - \frac{945}{4} = \frac{-2619}{8}$$

f. $\frac{x_1}{x_2^{2}} + \frac{x_2}{x_1^{2}}$

$$= \frac{(x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3}}{(x_1 x_2)^2} = \frac{-2619/8}{1225/4} = \frac{-2619}{2450}$$

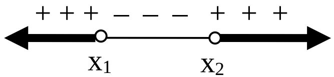
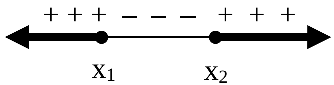
B. Pertidaksamaan Kuadrat

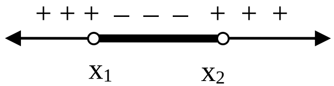
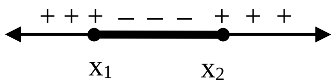
Bentuk <u>baku</u> pertidaksamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, dan $ax^2 + bx + c > 0$

Adapun langkah penyelesaian Pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut:

1. Ubah bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk baku (jika bentuknya belum baku)
2. Cari nilai pembentuk nolnya yaitu x_1 dan x_2 (cari nilai akar–akar persamaan kuadratnya)

3. Simpulkan daerah himpunan penyelesaiannya:

No	Pertidaksamaan	Daerah HP penyelesaian	Keterangan
a	$>$	 Hp = $\{x \mid x < x_1$ atau $x > x_1\}$	• Daerah HP (tebal) ada di tepi, menggunakan kata hubung atau • x_1, x_2 adalah akar–akar persaman
b	$\geq$	 Hp = $\{x \mid x \leq x_1$ atau $x \geq x_1\}$	

			kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
c	$<$	 Hp = $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	• Daerah HP (tebal) ada tengah • x_1, x_2 adalah akar–akar persaman kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
d	$\leq$	 Hp = $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$	

Contoh soal

Tentukan HP dari pertidaksamaan berikut

1. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

   Jawaban :

   $x^2 - 2x - 3 = 0$

   $(x - 3)(x + 1) = 0$,

   maka $x = 3, -1$

   c. dan d. Gambar disamping

   yang diminta ($\leq$) maka daerahnya (-)

   e. HP $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$

2. $-2x2 - 11x - 15 < 0$

   Jawaban :

   a. $-2x2 - 11x - 15 = 0$

   b. $(2x - 5)(-x + 3) = 0$,

   maka $x = 5/2, 3$

   c. dan d. gambar disamping

   yang diminta ($<$) maka daerahnya (-)

   e. HP $\{x \mid x < 5/2 \text{ , } x > 3\}$

3. x2 – 4x + 4 < 0

Jawaban :

a. x2 – 4x + 4 = 0

b. (x - 2)2 = 0

maka x = 2

misal x = 3 => (3 - 2)2 = 1 (+)

x = 1 => (1 - 2)2 = 1 (+)

c. dan d. gambar disamping

yang diminta (<) maka daerahnya (-)

e. HP { } atau Himpunan Kosong

C. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$. Dari bentuk aljabar tersebut dapat diilustrasikan sebagi bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.

Jika,

1. a > 0, maka parabola terbuka ke atas
2. a < 0, maka parabola terbuka ke bawah

3. $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu X
4. $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu X
5. $D > 0$, maka parabola memotong sumbu X di dua titik

Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah sebagai berikut

a. Menentukan titik potong dengan sumbu X, diperoleh jika $y = 0$
b. Menentukan titik potong dengan sumbu Y, diperoleh jika $x = 0$
c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$
d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$
e. Koordinat titik balik $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

Contoh soal

Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 4x$

Penyelesaian

a. Titik potong dengan sumbu X, jika y = 0

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad (x + 4) = 0$$

$$x = -4$$

Jadi memotong sumbu X di titik (0, 0) dan (–4, 0)

b. Titik potong dengan sumbu Y, jika x = 0

maka,

$$y = 0^2 + 4.0$$

$$= 0$$

Jadi memotong sumbu Y di titik (0, 0)

c. Persamaan sumbu simetri

$$x = \frac{-4}{2.1} = -2$$

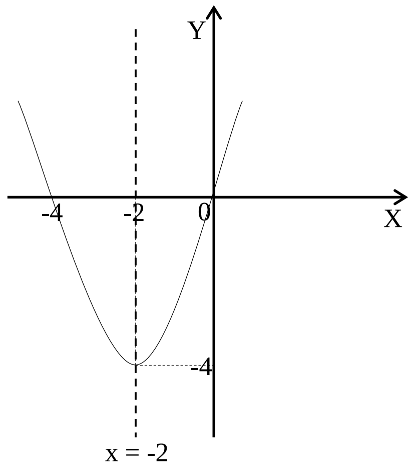
Jadi persamaan sumbu simetrinya x = –2

d. Nilai Ekstrim/nilai stasioner, untuk $x = -2$

$$y = (-2)^2 + 4(-2)$$
$$= -4$$

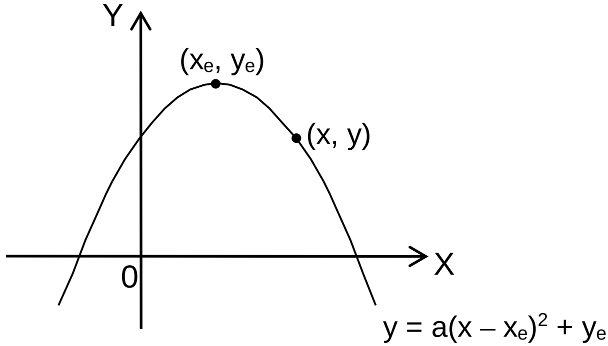
e. Koordinat titik balik: $(-2, -4)$

f. Grafik

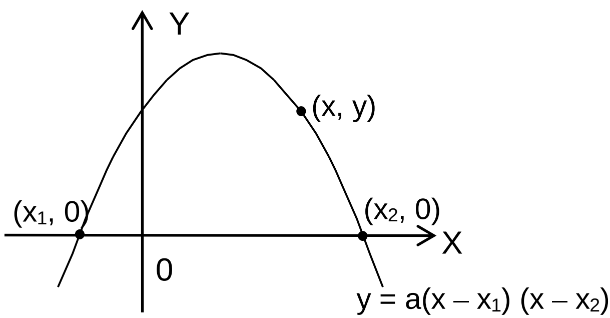


1. Menentukan persamaan grafik fungsi kuadrat

b. Grafik fungsi kuadrat yang melalui titik balik (x_e, y_e) dan sebuah titik tertentu (x, y):

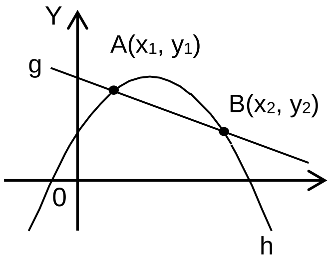


c. Grafik fungsi kuadrat yang memotong sumbu X di dua titik (x_1, 0), (x_2, 0), dan melalui sebuah titik tertentu (x, y):

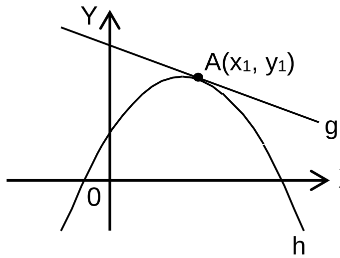


2. Kedudukan Garis Terhadap Kurva Parabola

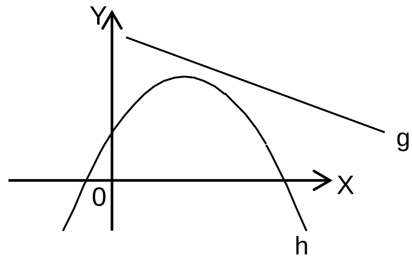
Kedudukan garis $g : y = mx + n$ dan parabola $h : \ y = ax^2 + bx + c$ ada tiga kemungkinan seperti pada gambar berikut ini.



g memotong *h* di dua titik



g menyinggung *h*



g tidak memotong dan tidak menyingggung *h*

Contoh soal 1

Grafik fungsi kuadrat yang persamaannya adalah $y = 6 + px - 5x^2$ memotong sumbu x. Salah satu titik potongnya adalah (-2,0), mak p = ….

Penyelesaian

$y = 6 + px - 5x^2$, memotong di sumbu x

memotong di sumbu x jika y = 0

masukkan nilai di titik (-2,0)

$0 = 6 - 2p - 20\ 2p$

$= 6 - 20\ 2p$

$= -14$

$p = -7$

Contoh soal 2

Grafik $y = px^2 + (p + 2)x - p + 4$ memotong Sumbu x di dua titik . Batas-batas nilai p yang memenuhi adalah ….

Penyelesaian

$y = px^2 + (p + 2)x - p + 4$

$a = p$, $b = p + 2$, $c = -p + 4$

Fungsi kuadrat, grafiknya memotong sumbu x di dua titik (akar berbeda/berlainan)

Syaratnya : $D > 0$ $b^2 - 4ac > 0$

$(p + 2)^2 - 4 .p (-p + 4) > 0$

$p^2 + 4p + 4 + 4p^2 - 16p > 0$

$5p^2 - 12p + 4 > 0$

$(5p - 2)(p - 2) > 0$

Pembuat nol : $p = 2/5$ atau $p = 2$

$p < 2/5$ atau $p > 2$

BAB V

HIMPUNAN

A. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan benda-benda atau obyek yang mempunyai definisi yang jelas.

Contoh:

3. A adalah himpunan bilangan genap antara 1 sampai dengan 11.
   Anggota himpunannya adalah 2,4,6,8,10. Jadi A = {2,4,6,8,10}
4. B adalah himpunan bilangan asli kurang dari 10
   Anggota himpunannya adalah 1,2,3,4,5,6,7,8,9
   Jadi B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
5. C adalah himpunan nama bulan yang huruf depannya J Anggota himpunannya adalah Januari, Juni, Juli
   Jadi C = {Januari, Juni, Juli}

B. Anggota Himpunan

Anggota himpunan adalah semua benda atau obyek yang terdapat di dalam himpunan. Anggota himpunan dinyatakan dengan notasi $\in$ dan jika bukan anggota himpunan dinyatakan dengan notasi $\notin$.

Banyaknya anggota himpunan A dinyatakan dengan n(A).

Contoh

A adalah himpunan bilangan prima kurang dari 10 ditulis:

A={bilangan prima kurang dari 10} atau A = {2,3,5,7} maka $2 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$ sedangkan $1 \notin A$, $4 \notin A$, $6 \notin A$, $8 \notin A$, $9 \notin A$

Banyak anggota himpunan A adalah n(A) = 4

C. Menyatakan Suatu Himpunan

Untuk menyatakan himpunan dapat digunakan 3 cara:

1. Menuliskan dengan kata-kata atau syarat keanggotaannya
2. Memberikan notasi pembentuk himpunan
3. Mendaftarkan anggota-anggotanya

No	Dengan Kata-kata	Notasi Pembentuk Himpunan	Mendaftarkan Anggotanya
1	A adalah himpunan Bilangan genap di bawah 10	A={x | x < 10 x ∈ bilangan genap}	A= {2,4,6,8}
2	B adalah himpunan kelipatan 5 di bawah 20	B={x | x < 20 x ∈ kelipatan 5}	B={5,10,15}

D. Macam-macam Himpunan

1. Himpunan kosong

Himpunan yang tidak mempunyai anggota, dilambangkan dengan { } atau ∅

contoh:

P adalah himpunan nama bulan yang diawali huruf K.

Tidak ada nama bulan yang diawali dengan huruf K, maka P={ }

2. Himpunan terhingga

Himpunan yang banyak anggotanya terhingga atau terbatas contoh:

P adalah himpunan bilangan genap di bawah 5, ditulis P ={2,4}

3. Himpunan tak terhingga

Himpunan yang banyak anggotanya tak terhingga atau tak terbatas. contoh

Q adalah himpunan bilangan cacah, ditulis Q={0,1,2,3,...}

4. **Himpunan semesta**

Himpunan yang memuat semua objek (anggota himpunan) yang dibicarakan. Himpunan semesta dilambangkan dengan "S".

contoh: R={1,2,3,4,5}

Himpunan semesta yang mungkin adalah:

S={bilangan asli di bawah 10}, S={Bilangan cacah} dsb.

5. **Himpunan Bagian**

Himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B jika setiap anggota A menjadi anggota B, ditulis dengan notasi $A \subset B$.

contoh

A={2,4} B={1,2,3,4,5}

maka $A \subset B$

Himpunan A dengan banyak anggota n(A) mempunyai himpunan bagian yang mungkin dari himpunan itu sebanyak 2n(A).

contoh

Diketahui himpunan A={2,3,5}□ n(A) = 3

Banyak himpunan yang mungkin dari himpunan A adalah 2n(A)= 23 = 8

Himpunan bagian dari A adalah

{ }, {2}, {3}, {5}, {2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5}

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

6. **Himpunan Ekuivalen**

Himpunan A dan B dikatakan Ekuivalen jika banyak anggota kedua himpunan tersebut sama□ n(A) = n(B).

contoh:

A={1,2,3}→ n(A) = 3

B={4,5,6}→ n(B) = 3

n(A) = n(B), maka A ekuivalen dengan B

E. Diagram Venn

Diagram Venn adalah suatu diagram yang digunakan untuk meyatakan sebuah himpunan atau beberapa himpunan yang saling berhubungan.

Aturan untuk membuat diagram Venn:

1. Himpunan semesta digambarkan dalam sebuah persegipanjang, simbol S ditulis pada pojok kiri atas.
2. Setiap himpunan yang dibicarakan ditunjukkan dengan gambar berupa kurva tertutup sederhana.
6. Setiap anggota himpunan ditunjukkan dengan noktah atau titik

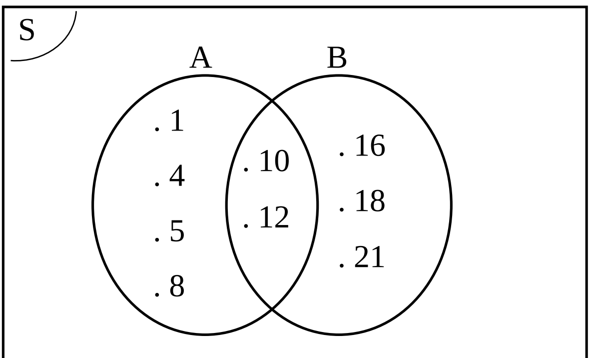
Contoh

S= {1,4,5,8,10,12,14,16,18,21}

A={1,4,5,8,10,12}

B={10,12,14,16,18,21}

Diagram Vennnya:



F. Operasi pada Himpunan

1. Irisan Himpunan

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A sekaligus menjadi anggota himpunan B.

Irisan himpunan A dan B dinotasikan dengan:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Daerah yang diarsir merupakan daerah $A \cap B$

Contoh

Diketahui:

A = {bilangan ganjil kurang dari 10} dan B = {bilangan prima kurang dari 10}

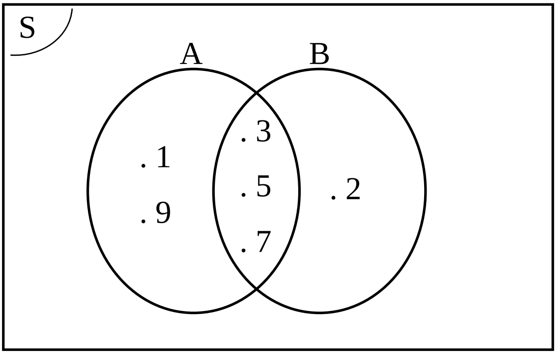
carilah $A \cap B$ dan gambar diagram Vennnya!

Jawab

$A = \{1,3,5,7,9\}$ $B = \{2,3,5,7\}$

$A \cap B = \{ 3,5,7 \}$

Diagram Vennnya:

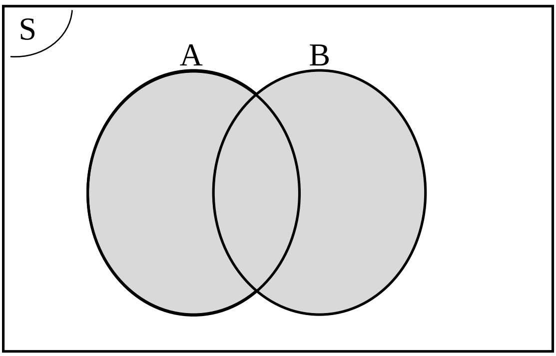


2. Gabungan Himpunan

Gabungan dua himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan himpunan A saja atau himpunan B saja.

Gabungan himpunan A dan B dinotasikan dengan:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$



Daerah yang diarsir merupakan daerah himpunan $A \cup B$

Contoh

Diketahui:

A = {faktor prima dari 30} dan B = {Nilai genap di bawah 10}

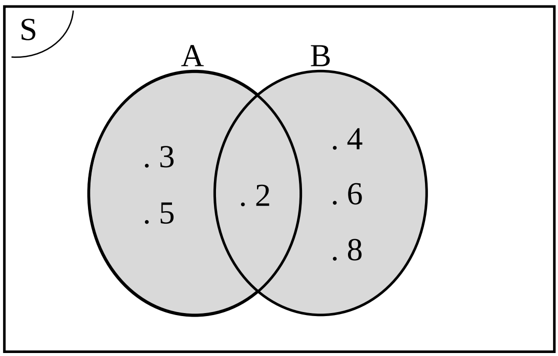
Tentukan $A \cup B$ dan gambar diagram Vennnya!

Jawab

A={2,3,5} B={2,4,6,8}

$A \cup B$ ={2,3,4,5,6,8}

Diagram Vennnya:



3. Selisih Himpunan

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan anggota A yang tidak menjadi anggota B.

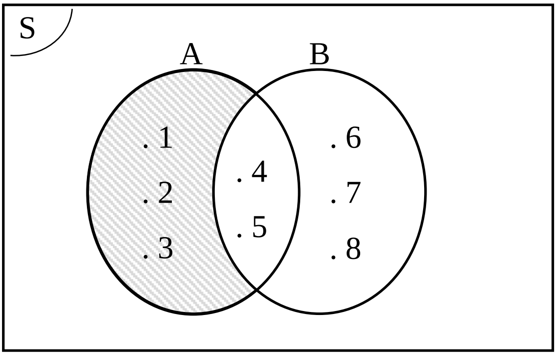
Selisih himpunan A dan B dinotasikan dengan: A – B, dibaca A kurang B

Contoh

Diketahui: A={1,2,3,4,5} B={4,5,6,7,8} Tentukan A – B!

Jawab

A-B = {1,2,3,4,5} - {4,5,6,7,8} = {1,2,3}



4. Jumlah Himpunan

Jumlah himpunan A dan B adalah himpunan dimana anggotanya adalah gabungan A dan B tetapi bukan irisan A dan B.

Contoh

Diketahui: A={a,b,c,d,e,f} B={d,e,f,g,h,i}

Tentukan A + B!

Jawab

A+B= {a,b,c,d,e,f} + {d,e,f,g,h,i} = {a,b,c,g,h,i}

5. **Komplemen**

Jika S adalah himpunan semesta dan A adalah suatu himpunan.

Komplemen dari himpunan A adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota himpunan S yang bukan anggota himpunan A.

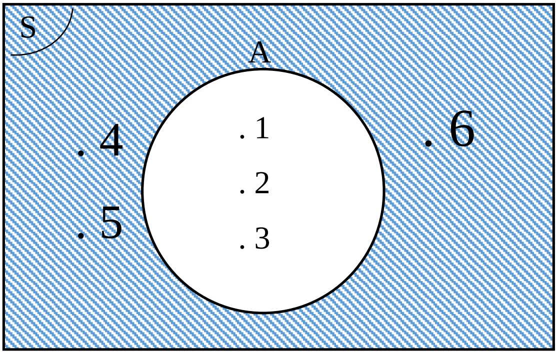
Komplemen A dinotasikan dengan A^C

Contoh

S = {1,2,3,4,5,6} A = {4,5,6} tentukan A^C

Jawab

$A^C = \{1,2,3\}$



G. Sifat-sifat Operasi pada Himpunan

1. Komutatif.

   $A \cap B = B \cap A$

   $A \cup B = B \cup A$

2. Asosiatif

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. Distributif

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Dalil De Morgan

Komplemen himpunan A adalah himpunan yang anggota-anggotanya bukan anggota A dan dilambangkan dengan A^C.

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

BAB VI

FUNGSI

A. Definisi Fungsi

Fungsi atau pemetaan merupakan relasi khusus. Tidak semua relasi merupakan fungsi. Definisi fungsi atau pemetaan diberikan sebagai berikut.

Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B dalam hal ini setiap $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ dipasangkan dengan tepat satu $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$. Suatu fungsi biasanya dinyatakan dengan huruf kecil, seperti f, g, dan h. suatu fungsi f dari A ke B ditulis dengan :

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

Fungsi di atas menghubungkan himpunan A ke himpunan B dengan setiap $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ dipasangkan dengan tepat satu $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$. Himpunan $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ disebut daerah asal (domain), pasangan $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$ dari $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, maka y disebut peta atau bayangan dari x dan $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$ yang merupakan peta dari $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ disebut range atau daerah hasil fungsi, dan semua anggota himpunan B disebut kodomain (daerah kawan) dari fungsi f. selain ditulis dalam bentuk $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$, fungsi dapat juga dituliskan dalam bentuk pemetaan atau rumus fungsi tersebut. Jika $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, dan y adalah peta (bayangan) dari x, maka fungsi f dapat juga ditulis sebagai brikut.

$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$, **dibaca "fungsi $\boldsymbol{f}$ memetakan $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$"**

atau dalam notasi rumus :

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

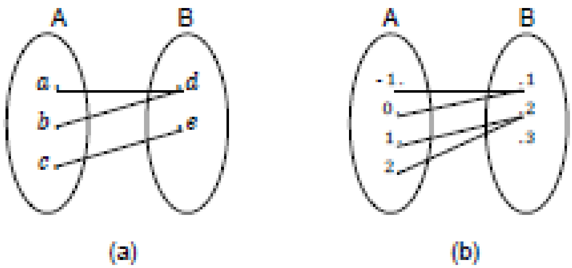
Berdasarkan penulisan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, x disebut variabel bebas dan y disebut variabel terikat. Variabel bebas adalah variabel yang nilainya ditentuka atau dipilih dari sembarang bilangan pada domain fungsi f, sedangkan variabel tearikat merupakan nilai fungsi dari nilai variabel bebas tersebut.

B. Sifat-Sifat Fungsi

1. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi dengan daerah hasil sama dengan kodomainnya disebut dengan fungsi surjektif atau fungsi onto. Dengan kata lain, fungsi surjektif dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ disebut fungsi surjektif jika hanya daerah hasil fungsi sama dengan himpunan *B* atau $\boldsymbol{R_f} = \boldsymbol{B}$.



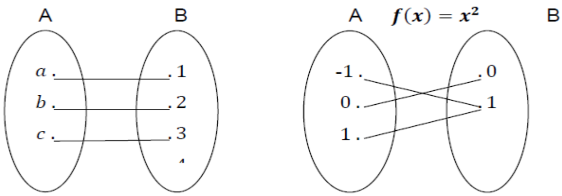
1) Gambar (a) merupakan fungsi surjektif karena setiap kodomain mempunyai pasangan atau $\boldsymbol{R_f} = \boldsymbol{B}$
2) Gambar (b) bukan merupakan fungsi surjektif karena ada anggota kodomain, yaitu 3 yang tidak mempunyai pasangan dari A.

2. Fungsi Injektif

Sebuah fungsi dengan setiap anggota domain yang berbeda mempunyai peta yang berbeda disebut fungsi injektif. Fungsi injektif disebut juga dengan fungsi satu-satu. Secara matematis, fungsi injektif dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ disebut fungsi injektif jika dan hanya jika untuk setiap $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \boldsymbol{A}$ **dan** $\boldsymbol{a_1} \neq \boldsymbol{a_2}$, maka berlaku $\boldsymbol{f(a_1)} \neq \boldsymbol{f(a_2)}$

Perhatikan gambar berikut.



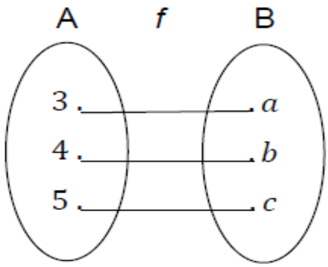
(a) (b)

1) Gambar (a) tersebut menunjukkan fungsi injektif karena setiap anggota domain fungsi f yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula.

2) Gambar (b) bukan merupakan fungsi injektif karena ada dua anggota domain fungsi $\boldsymbol{f}$, yaitu -1 dan 1 yang mempunyai peta sama, yaitu 1.

3. Fungsi Bijektif

Misalkan $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ dengan $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ dan $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ dinyatakan dengan pasangan berurutan $\boldsymbol{f} = \{(\mathbf{3}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{4}, \boldsymbol{b}), (\mathbf{5}, \boldsymbol{c})\}$. Fungsi *f* dapat ditunjukkan sebagai diagram panah seperti pada gambar berikut.



Pada gambar tersebut tampak bahwa fungsi *f* adalah fungsi surjektif karena range fungsi *f* sama dengan kodomain fungsi *f* atau $\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{B}$. Di samping itu, fungsi *f* juga fungsi injektif karena untuk setiap anggota domain yang berbeda mempumyai peta yang berbeda. Fungsi yang surjektif sekaligus injektif seperti ini disebut fungsi bijektif.

Secara matematis, hal ini dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi *f* sekaligus merupakan fungsi surjektif dan injektif.

C. Jenis-Jenis Fungsi

1. Fungsi Komposisi

a. Pengertian Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi *f* dirumuskan dengan $\boldsymbol{f(x) = x + 1}$ dan *g* dirumuskan dengan $\boldsymbol{g(x) = x^2}$.

Dengan menggunakan rumus $\boldsymbol{f(x) = x + 1}$, untuk

$$\boldsymbol{x = 1 \to f(1) = 1 + 1}$$

$$\boldsymbol{x = 2 \to f(2) = 2 + 1}$$

$$\boldsymbol{x = t \to f(t) = t + 1}$$

Jika *x* diganti dengan $\boldsymbol{g(x)}$, diperoleh

$$\boldsymbol{f\big(g(x)\big) = g(x) + 1}$$

$$\boldsymbol{= x^2 + 1}$$

Misalkan fungsi $\boldsymbol{h(x) = f\big(g(x)\big) = x^2 + 1}$.

Fungsi $\boldsymbol{h(x)}$ yang diperoleh dengan cara diatas, dinamakan fungsi komposisi *g* dan *f*. fungsi ini dituliskan dengan $\boldsymbol{f \circ g}$, dibaca "*f bundaran g*".

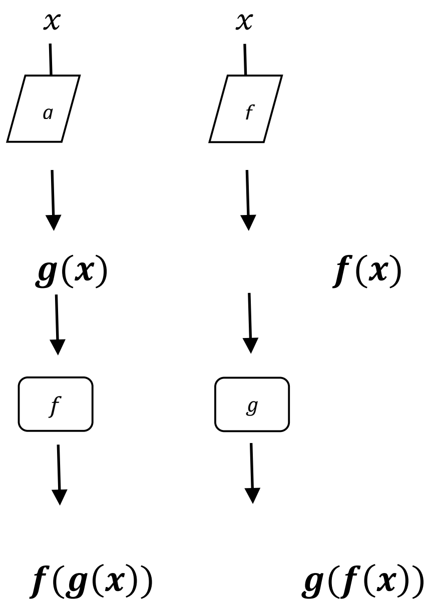
Dengan cara serupa, diperoleh

$$\boldsymbol{g\big(f(x)\big) = g(x+1)^2}$$

$$\boldsymbol{= (x+1)^2}$$

Fungsi $\boldsymbol{g(f(x))}$ selanjutnya ditulis sebagai $\boldsymbol{(g \circ f)(x)}$.

Untuk mempermudah dalam memahami fungsi komposisi, amatilah uraian berikut.



(a) (b)

Dari gambar di atas, (a) fungsi g menerima masukan x sehingga g bekerja pada x dan menghasilkan $\boldsymbol{g(x)}$ sebagai keluaran. Fungsi $\boldsymbol{g(x)}$ menjadi masukan fungsi $\boldsymbol{f}$ sehingga fungsi $\boldsymbol{f}$ bekerja pada $\boldsymbol{g(x)}$ dan menghasilkan keluaran $\boldsymbol{f(g(x))}$. (b) fungsi $\boldsymbol{f}$ menerima $\boldsymbol{x}$ sebagai masukan dan menghasilkan $\boldsymbol{f(x)}$. Kemudian, $\boldsymbol{f(x)}$ menjadi masukan bagi fungsi $\boldsymbol{g}$ dan menghasilkan keluaran $\boldsymbol{g(f(x))}$.

Dari uraian di atas, dapat dibuat suatu definisi komposisi dua fungsi, yaitu sebagai berikut.

Misalkan fungsi $\boldsymbol{f: A \to B}$, dengan $\boldsymbol{f(a) = b}$ dan fungsi $\boldsymbol{g: B \to C}$ dengan $\boldsymbol{g(b) = c}$. Komposisi fungsi $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$, ditulis $\boldsymbol{g \circ f}$ (dibaca : $\boldsymbol{g}$ bundaran $\boldsymbol{f}$) adalah suatu fungsi yang ditentukan dengan aturan $\boldsymbol{(g \circ f)(a) = g(f(a))}$.

Contoh :

1. Diketahui fungsi $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ yang dinyatakan dengan himpunan pasangan sebagai berikut.

   $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{(6,-2), (8,-1), (10,0), (12,1)}\}$

   $\boldsymbol{g} = \{\boldsymbol{(-2,8), (-1,10), (0,12), (1,6)}\}$

Tentukan $\boldsymbol{f \circ g}$, $\boldsymbol{g \circ f}$, $\boldsymbol{(f \circ g)(1), (g \circ f)(6)}$, **dan** $\boldsymbol{(g \circ f)(10)}$

Penyelesaian

a. $\boldsymbol{g \circ f = \{(6,8),(8,10),(10,12),(12,6)\}}$

b. $\boldsymbol{f \circ g =}$
$\boldsymbol{\{(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,-2)\}}$

c. $\boldsymbol{(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(6) = -2}$

d. $\boldsymbol{(g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(-2) = 8}$

e. $\boldsymbol{(g \circ f)(10) = g(f(10)) = g(0) = 12}$

2. Diketahui $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$ dan $\boldsymbol{g(x) = x^2}$.
Tentukan

a. $\boldsymbol{(g \circ f)(x)}$;

b. $\boldsymbol{(f \circ g)(x)}$;

c. Apakah $\boldsymbol{g \circ f = f \circ g}$?

Penyelesaian

a. $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4}$

b. $\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 + 2}$

c. Karena $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 12x + 4$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 2$ maka terlihat bahwa $g \circ f \neq f \circ g$.

Latihan Soal

1. Diketahui $f(x) = 3x + 5$ dan $g(x) = 2x - 7$. Tentukan
   a. $(f \circ g)(3)$;
   b. $(g \circ f)(-2)$;
2. Jika $f(x) = x^3 + 2$ dan $g(x) = \frac{2}{x-1}$ maka $(g \circ f)(x) =$……
3. Diketahui fungsi $f(x) = 6x - 3$, $g(x) = 5x + 4$, dan $(g \circ f)(a) = 81$. Nilai $a =$….
4. Fungsi $g: R \to R$ ditentukan oleh $g(x) = x^2 - x + 3$ dan fungsi $f: R \to R$ sehingga $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 3x + 4$. Rumus fungsi $f(x - 2) =$…..
5. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ dengan $f(x) = x - 3$ dan $g(x) = x^2 + 5$.

Jika $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ maka $x =$.....

b. Sifat-Sifat Komposisi Fungsi

Untuk memahami sifat-sifat komposisi fungsi, dapat ditemukan dari definisi komposisi itu. Misalkan diketahui fungsi-fungsi sebagai berikut.

$$f(x) = 5x - 4$$

$$g(x) = 2x + 8$$

$$h(x) = x^2$$

Komposisi fungsi $f \circ g$ dan $g \circ f$ dapat ditentukan seperti di bawah ini.

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x + 8) = 5(2x + 8) - 4 = 10x + 40 - 4 = 10x + 36$

b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(5x - 4) = 2(5x - 4) + 8 = 10x - 8 + 8 = 10x$

Dari hasil di atas tampak bahwa $f \circ g \neq g \circ f$ sehingga komposisi fungsi tidak bersifat komutatif. Setelah mengerjakan tugas di atas, dapat ditentuka bahwa komposisi fungsi diatas berlaku sifat asosiatif.

Misalkan $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{I}$ adalah fungsi pada himpunan bilangan real dengan $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 1}$ dan $\boldsymbol{I(x) = x}$. Akan dibuktikan bahwa $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{I})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$.

Perhatikan :

$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{I})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x^2 + 1}$

$(\boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{2x^2 + 1}$

Terlihat dari uraian di atas $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{I})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Jadi $\boldsymbol{I(x) = x}$ merupakan fungsi identitas dalam komposisi fungsi.

Dengan demikian, dapat dituliskan sifat-sifat komposisi fungsi sebagaai berikut.

1) Komposisi fungsi tidak bersifat komutatif, yaitu $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$.
2) Komposisi fungsi bersifat asosiatif, yaitu $\big((\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}) \circ \boldsymbol{h}\big)(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f} \circ (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h}))(\boldsymbol{x})$.
3) Terdapat fungsi identitas $\boldsymbol{I(x) = x}$ sehingga $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{I})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Menentukan Fungsi yang Diketahui Fungsi Komposisinya

Jika fungsi komposisi $\boldsymbol{f \circ g}$ atau $\boldsymbol{g \circ f}$ diketahui dan fungsi $\boldsymbol{f}$ diketahui maka dapat menentukan fungsi $\boldsymbol{g}$. Sebaliknya, jika fungsi komposisi $\boldsymbol{f \circ g}$ atau $\boldsymbol{g \circ f}$ diketahui dan fungsi $\boldsymbol{g}$ diketahui maka fungsi $\boldsymbol{f}$ dapat ditentukan nilainya.

Contoh :

1. Diketahui fungsi $\boldsymbol{(f \circ g)(x) = -15x + 5}$ dan fungsi $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$. Tentukan fungsi $\boldsymbol{g(x)}$.

$$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = -15x + 5}$$

$$\boldsymbol{f\big(g(x)\big) = -15x + 5}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 3\big(g(x)\big) + 2 = -15x + 5}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \quad 3\big(g(x)\big) = -15x + 5 - 2}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \quad 3\big(g(x)\big) = -15x + 3}$$

Penyelesaian

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \quad g(x) = \frac{-15x + 3}{3}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \quad g(x) = -5x + 1}$$

Jadi, $\boldsymbol{g(x) = -5x + 1}$

2. Diketahui fungsi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 9}$ dan $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x}$. Tentukan $\boldsymbol{f(x)}$.

   Penyelesaian

$$\boldsymbol{(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x}$$

$$\boldsymbol{g\left(f(x)\right) = 4x^2 + 12}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\left(f(x)\right)^2 - 9 = 4x^2 + 12x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\left(f(x)\right)^2}$$

$$\boldsymbol{= 4x^2 + 12x + 9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\left(f(x)\right)^2 = (2x+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$$

   Jadi, $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$.

3. Diketahui fungsi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Jika $\boldsymbol{g(x) = x + 2}$ dan $\boldsymbol{(f \circ g)(x) = 5x + 7}$, tentukan $\boldsymbol{f(x)}$.

   Penyelesaian

$$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f\left(g(x)\right) = 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x+2) = 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 5(x-2)+7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 5x - 10 + 7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 5x - 3}$$

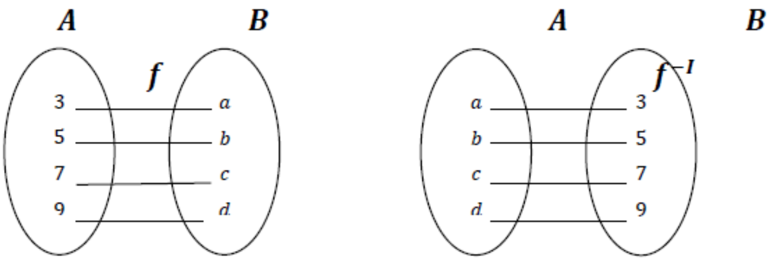
Jadi, $\boldsymbol{f(x) = 5x - 3}$

2. Fungsi Invers

a. Pengertian invers suatu fungsi

Misalkan $\boldsymbol{f: A \to B}$ adalah suatu fungsi, maka relasi invers dari fungsi $\boldsymbol{f}$ dinyatakan $\boldsymbol{f^{-1}: B \to A}$. Apabila relasi invers tersebut merupakan fungsi, maka ia disebut fungsi invers. Yang perlu diperhatikan bahwa tidak semua fungsi mempunyai fungsi invers, tetapi semua fungsi mempunyai relasi invers.

Untuk memahami fungsi invers, perhatikan berikut ini. Misalkan $\boldsymbol{f = \{(3,\ a), (5,\ b), (7,\ c), (9,\ d)\}}$ maka invers dari $\boldsymbol{f}$ adalah $\boldsymbol{\{(a,\ 3), (b,\ 5), (c,\ 7), (d,\ 9)\}}$.



Invers fungsi $\boldsymbol{f}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{f^{-I}}$. Diagram panah untuk fungsi $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{f^{-I}}$ tersebut tampak seperti gambar di bawah ini.

Balikan (invers) dari fungsi $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$ adalah $\boldsymbol{f^{-I}: B \rightarrow A}$. Fungsi $\boldsymbol{f}$ memetakan anggota himpunan $\boldsymbol{A}$ ke himpunan $\boldsymbol{B}$ yang dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\{ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\ \}$, sedangkan fungsi $\boldsymbol{f^{-I}}$ memetakan anggota himpunan $\boldsymbol{B}$ ke himpunan$\boldsymbol{A}$ yang dinyatakan dengan $\{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$. Secara umum, definisi invers suatu fungsi $\boldsymbol{f}$ adalah sebagai berikut.

Jika fungsi $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$ dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\boldsymbol{f} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\}$ maka invers dari fungsi $\boldsymbol{f}$ adalah $\boldsymbol{f^{-I}: B \rightarrow A}$ yang dinyatakan dengan

$$\boldsymbol{f^{-I}} = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\}.$$

b. Syarat Suatu Fungsi Mempunyai Fungsi Invers

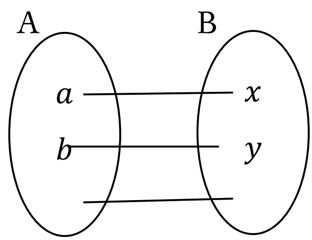
1) Jika $\boldsymbol{f^{-I}}$ ada, maka$\boldsymbol{R_f} = \boldsymbol{D_{f^{-I}}}$dan $\boldsymbol{D_f} = \boldsymbol{R_{f^{-I}}}$
2) $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$ suatu fungsi mempunyai$\boldsymbol{f^{-I}: B \rightarrow}$ Abila $\boldsymbol{f}$ bijektif

c. Cara Menentukan Rumus Fungsi Invers

Invers sebuah fungsi belum tentu berbentuk fungsi. Jika invers suatu fungsi berbentuk sebuah fungsi maka inversnya itu disebut fungsi invers. Syarat agar invers sebuah fungsi merupakan fungsi invers adalah fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif. Hal itu telah kita pelajari dalam pembahasan sebelumnya.

Suatu fungsi $\boldsymbol{f}$ akan mempunyai fungsi invers, yaitu $\boldsymbol{f^{-I}}$ jika dan hanya jika fungsi $\boldsymbol{f}$ bijektif atau dalam korespondensi satu-satu. Misalkan, $\boldsymbol{f}$ merupakan fungsi dari $\boldsymbol{A}$ ke $\boldsymbol{B}$, maka $\boldsymbol{f^{-I}}$ merupakan fungsi invers $\boldsymbol{f}$ jika berlaku$(\boldsymbol{f^{-I} \circ f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}dan(\boldsymbol{f \circ f^{-I}})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Perhatikan gambar dibawah ini. Untuk menentukan fungsi invers dari suatu fungsi dapat dilakukan dengan cara berikut ini.



a. Buatlah permisalan$\boldsymbol{f(x) = y}$ pada persamaan

b. Persamaan tersebut disesuaikan dengan$\boldsymbol{f(x) = y}$, sehingga ditemukan fungsi dalam $\boldsymbol{y}$ dan nyatakanlah $\boldsymbol{x = f(x)}$ Gantilah $\boldsymbol{y}$ dengan $\boldsymbol{x}$, sehingga$\boldsymbol{f(x) = f^{-I}(x)}$.

Contoh Soal:

1. Tentukan $\boldsymbol{f^{-I}(x)}$ dari $\boldsymbol{f(x) = 2x - 6}$

Jawab :

$$\boldsymbol{f(x) = y}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 2x - 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = 2x - 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{2x = y + 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{y + 6}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f^{-I}(x) = \frac{x + 6}{2}}$$

2. Tentukan rumus invers fungsi dari fungsi $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{3-4}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\mathbf{+3}}$

Jawab :

$$\boldsymbol{f(x) = y}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{3-4}\boldsymbol{x}}{x+\mathbf{3}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{3-4}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{y(x+3) = 3-4x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{yx+3y = 3-4x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{yx+4x = 3-3y}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x(y+4) = 3-3y}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{3-3y}}{\boldsymbol{y+4}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{3-3x}}{\boldsymbol{x+4}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{f^{-1}(x)} = \frac{\boldsymbol{3-3x}}{\boldsymbol{x+4}}$$

Latihan Soal :

1. Tentukan $f^{-I}(x)$ dari $f(x) = \frac{x+3}{2x-3}$
2. Tentukan $f^{-I}(x)$ dari $f(x) = \frac{x}{x+2}$
3. Tentukan $f^{-I}(x)$ dari $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$

c. Hubungan Invers dengan Komposisi Fungsi

Untuk mengetahui hubungan invers dengan komposisi fungsi, perhatikan uraian berikut.

a. $f(x) = x + 5$

Dapat ditentukan invers fungsi dari fungsi f, yaitu

$y = f(x)$

$\Leftrightarrow y = x + 5$

$\Leftrightarrow x = y - 5$

$\Leftrightarrow f^{-I}(y) = y - 5$

Jadi, $f^{-I}(x) = x - 5$.

1) $(f \circ f^{-I})(x) = f\left(f^{-I}(x)\right) =$

$f(x - 5) = (x - 5) + 5 = x$

2) $(f^{-I} \circ f)(x) = f^{-I}(f(x) =$

$f^{-I}(x + 5) = (x + 5) - 5 = x$

Dengan demikian, diperoleh

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

b. $f(x) = x^2 + 6$

$\Leftrightarrow y = f(x)$

$\Leftrightarrow y = x^2 + 6$

$\Leftrightarrow x^2 = y - 6$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y - 6}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y - 6}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x - 6}$

Untuk domain f adalah $x \geq 0$ maka

$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 6}$, untuk $x \geq 6$.

Untuk domain f adalah $x < 0$ maka

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 6}$, untuk $x \geq 6$.

Oleh karena itu,

1) $(f \circ f^{-I})(x) = f\left(f^{-I}(x)\right) =$

$f(\sqrt{x-6}\,) = (\sqrt{x-6})^2 + 6 =$

$(x-6)+6 = x$

2) $(f^{-I} \circ f)(x) = f^{-I}\big(f(x)\big) =$

$f^{-I}(x^2-6) = \left(\sqrt{x^2+6-6}\right) =$

$\sqrt{x^2} = x$

Dengan demikian, diperoleh

$$(f \circ f^{-I})(x) = (f^{-I} \circ f)(x) = x$$

Dari uraian di atas, dapat dilihat bahwa komposisi fungsi dengan inversnya (atau sebaliknya) akan menghasilkan fungsi identitas sehingga secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(f \circ f^{-I})(x) = (f^{-I} \circ f)(x) = x = I(x)$$

2. Invers Fungsi Komposisi

Misalkan $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ merupakan fungsi maka komposisi fungsi-fungsi itu adalah $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ dan $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$.

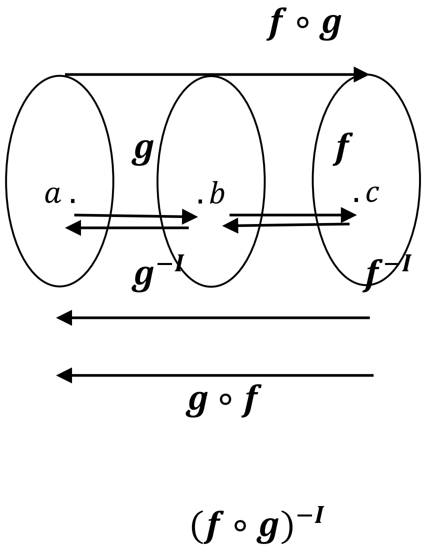
Invers dari komposisi didefinisikan sebagai berikut.

Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan komposisi dari fungsi $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$, yaitu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ dan $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, invers dari fungsi $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan komposisi dari invers $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ yang ditulis.

$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})^{-I} = \boldsymbol{g}^{-I} \circ \boldsymbol{f}^{-I}$

$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})^{-I} = \boldsymbol{f}^{-I} \circ \boldsymbol{g}^{-I}$

Perhatikan diagram panah berikut.



Dari diagram di atas tampak bahwa invers dari fungsi komposisi $\boldsymbol{f \circ g}$, yaitu $(\boldsymbol{f \circ g})^{-\boldsymbol{I}}$ diperoleh dengan memetakan $\boldsymbol{c}$ ke $\boldsymbol{b}$ oleh $\boldsymbol{f}^{-\boldsymbol{I}}$, kemudian dilanjutkan dengan memetakan $\boldsymbol{b}$ ke $\boldsymbol{a}$ oleh $\boldsymbol{g}^{-\boldsymbol{I}}$, dan sebaliknya. Dengan demikian, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(\boldsymbol{f \circ g})^{-\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{g}^{-\boldsymbol{I}} \circ \boldsymbol{f}^{-\boldsymbol{I}})(\boldsymbol{x}) \quad \text{dan}$$

$$(\boldsymbol{g \circ f})^{-\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}^{-\boldsymbol{I}} \circ \boldsymbol{g}^{-\boldsymbol{I}})(\boldsymbol{x})$$

Contoh Soal:

1. Diberikan fungsi $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$, yaitu $\boldsymbol{f(x) = 5x + 8}$ dan $\boldsymbol{g(x) = x - 5}$. Tentukan $(\boldsymbol{f \circ g})^{-\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x})$.

   Jawab:

   $$\begin{aligned} (\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f(g(x))} \\ &= \boldsymbol{f(x - 5)} \\ &= \boldsymbol{5(x - 5) + 8} \\ &= \boldsymbol{5x - 25 + 8} \\ &= \boldsymbol{5x - 17} \end{aligned}$$

   Misalkan $(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

$$y = (f \circ g)(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 5x - 17$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x = y + 17$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y + 17}{5}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-I}(y) = \frac{y + 17}{5}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-I}(x) = \frac{x + 17}{5}$$

Jadi, fungsi invers dari $(f \circ g)^{-I}(x) = \frac{x+17}{5}$.

2. Tentukan nilai dari $(f \circ g)^{-I}(x)$ jika diketahui $f(x) = \frac{3}{x-5}$ dan $g(x) = 6 - 2x$

   Jawab :

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

   $$(f \circ g)(x) = f(6 - 2x)$$

   $$(f \circ g)(x) = \frac{3}{(6 - 2x) - 5}$$

   $$(f \circ g)(x) = \frac{3}{1 - 2x}$$

Misalkan $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}(\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{3} - \boldsymbol{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})^{-\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{y}) = \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})^{-\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}$$

Jadi, fungsi invers dari $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ adalah $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})^{-\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}$

BAB VII

BARISAN DAN DERET

Lingkungan memberikan banyak pengetahuan yang tanpa kita sadari, baik yang kita lihat, kita rasakan bahkan kita lakukan. Untuk memudahkan alamat seseorang pemerintah memberikan kebijakan untuk membuat nama jalan dan nomor rumah di setiap tempat. Pada tempat-tempat tertentu untuk menjaga ketertiban dan keamanan dibuat nomor antrian dan lain sebagainya. Fenomena-fenomena seperti ini adalah bagian dari materi matematika yang kita kenal dengan barisan dan deret.

A. Barisan Aritmetika

Barisan Aritmetika adalah susunan bilangan yang kenaikan suku berurutannya ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang tetap/sama Bilangan yang tetap/sama itu disebut dengan beda (b). terdapat juga definisi lain yakni:

Barisan aritmetika adalah susunan bilangan yang memenuhi sifat setengah dari jumlah suku pertama dan terakhir sama dengan suku tengahnya.

Contoh

Perhatikan barisan berikut.

1. 1,3,5,7,…
2. 2,6,10,40,30,…
3. 60,50,40,30,…

Berdasarkan contoh di atas dapat dituliskan:

U_1, U_2, U_3, …

dimana

$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots\ldots = U_n - U_{n-1} =$ beda (b)

Rumus suku ke n.

Jika suku pertama $n_1 \rightarrow$ dinamakan a, kita mendapatkan:

$U_2 - U_1 = b \longrightarrow U_2 = U_1 - b = a + b$

$U_3 - U_2 = b \longrightarrow U_3 = U_2 - b = (a + b) + b = a + 2b$

$U_4 - U_3 = b \longrightarrow U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

dan seterusnya.

Dari uraian di atas dapat dituliskan dalam bentuk baku yakni

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots , a + (n – 1) b$

Sehingga rumus suku ke n untuk barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n – 1) b$.

Contoh

1. Carilah suku ke 40 dari barisan aritmatika 1, 6, 11, 16, …

   Penyelesaian:

   $a = 1, b = 5, \ n = 40$

   $U_{40} = a + (n – 1) b$

   $= 1 (40 – 1) 5 = 196.$

2. Carilah suku pertama dan bedanya, jika diketahui $U_{10} = 41$ dan $U_3 = 20$.

   Penyelesaian:

   $U_n = a + (n\text{-}1)b$

   $U_{10} = a + (10\text{-}1)b$

   $41 = a + (10 – 1) b$

   $41 = a + 9b \quad \dots (1)$

$U3 \ = a + (3-1)b$

$20 \ = a + 2b \quad \ldots (2)$

Sistem persamaannya:

$$\begin{array}{rcl} a + 9b & = & 41 \\ a + 2b & = & 20 \\ \hline 7b & = & 21 \\ b & = & 3 \end{array} \ -$$

$b = 3$ substitusi ke persamaan (1), didapat:

$a + 9(3) = 41$

$a + 27 \ = 41$

$a \ = 41 - 27$

$a \ = 14$

Jadi suku pertama (a) = 14 dan beda (b) = 3.

3. Tentukan rumus suku ke n dari barisan:

   2, 4, 6, 8, ………..

   Penyelesaian:

   Suku pertama (a) = 2 dan beda (b) = 2

   $U_n \ = a + (n - 1)b$

   $\quad = 2 + (n - 1)2$

$= 2 + 2n - 2$

$= 2n$

Jadi $U_n = 2n$

B. Deret Aritmetika

Deret aritmatika adalah jumlah semua suku-suku pada barisan aritmatika, deret artitmatika juga biasa disebut dengan deret hitung. Deret aritmatika yang mempunyai beda lebih dari nol atau positif, maka deretnya disebut dengan deret aritmatika naik. Sedangkan deret aritmatika yang mempunyai beda kurang dari nol atau negatif maka deretnya disebut deret menurun

Deret Aritmetika adalah penjumlahan dari suku – suku pada barisan aritmetika.

$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

Selanjutnya $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ di tulis S_n (Sum n = jumlah suku ke-n)

Jika S_n merupakan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmatika, maka rumus umum untuk S_n dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ ...\ + U_n$

Maka

$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ ...$
$+ (a + (n - 1)b)$

$S_n = U_n + (U_n + b) + (U_n + 2b) + (U_n + 3b) + \ ...$
$+ a$ $\quad +$

$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \ .$
$. . + (a + U_n)$

Penjumlahan sebanyak n suku

$$2S_n = n\,(a + U_n) \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{1}{2} n\,(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n\,[a + (a + (n - 1)\,b)]$$

$$S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)\,b]$$

Jadi rumus umum jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah :

$$S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)\,b]$$

Contoh

Carilah jumlah 100 suku pertama deret 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + . . .

Pembahasan

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + . . .

Dalam hal ini : $a = 1$, $b = 3 - 1 = 2$, dan $n = 100$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} n\,[2a + (n-1)\,b] \\
&= \frac{1}{2} 100\,[2 \,.\, 1 + (100-1)\,2] \\
&= 50\,[2 + (99)\,2] \\
&= 50\,[200] \\
&= 10.000
\end{aligned}
$$

C. Barisan Geometri

Barisan Geometri adalah sederetan bilangna yang berupa suku (satuan) atau unit (U) dan ditulis secara berurutan, dimana perbandingan dua buah suku yang berurutan berharga konstan(tetap) dan dinamakan rasio yang dilambangkan dengan “r”

Perhatikan bahwa $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ merupakan contoh barisan geometri. Contoh barisan geometri yang lainnya adalah :

a. 2, 6, 18, 54, …

b. 5, -10, 20, -40, …

c. 27, 9, 3, 1, …

Secara umum dapat dikatakan bahwa barisan

$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$ disebut barisan geometri jika

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \text{konstanta.}$$

Konstanta dalam hal ini disebut dengan rasio (r).

Untuk barisan pada contoh diatas :

a. rasio = $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \ldots = 3$

b. rasio = $\frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \ldots = -2$

c. rasio = $\frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \ldots = \frac{1}{3}$

Barisan geometri ialah suatu barisan bilangan-bilangan dimana rasio di antara dua suku berurutan merupakan bilangan tetap.

Rumus umum suku ke – *n* barisan geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *r* dapat ditemukan seperti berikut :

$U_1 = a$

$U_2 = ar$

$U_3 = ar^2$

$U_4 = ar^3$

Dimana :

a adalah suku pertama / nilai awal
r adalah rasio
$U_n = ar^{n-1}$

Contoh

Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu 21 dan hasil kalinya 216. Tentukan ketiga bilangan itu.

Pembahasan

Pemisalan yang mudah untuk barisan geometri adalah $\frac{a}{r}$, a, dan ar.

Jumlah ketiga bilangan itu adalah 21 maka $\frac{a}{r}$ + a + ar = 21.

Hasil kali ketiga bilangan adalah 216 maka $\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \leftrightarrow a3 = 216$

Karena $a^3 = 216$, diperoleh a = 6. Kemudian, substitusikan nilai a = 6 ke persamaa $\frac{a}{r} + a + ar = 21$ sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$\frac{6}{r} + 6 + 6r = 21$ .... (kedua ruas dikalikan dengan r)

$\leftrightarrow 6 + 6r + 6r^2 = 21r$

$\leftrightarrow 6 - 15r + 6r^2 = 0$ .... (kedua ruas dibagi 3)

$\leftrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\leftrightarrow (2r - 1)(r - 2) = 0$

$\leftrightarrow 2r - 1 = 0$ atau $r - 2 = 0$

$\leftrightarrow r = ½$ atau $r = 2$

Dari persamaan di atas, diperoleh r = ½ dan r = 2.

Untuk r = ½ dan a = 6, ketiga bilangan tersebut 12, 6, dan 3.

Untuk r = 2 dan a = 6, ketiga bilangan tersebut 3, 6, dan 12.

D. Deret Geometri

Seperti halnya dengan deret aritmatika, jika kita memiliki suatu barisan geometri maka dapat dibentuk suatu deret yang merupakan penjumlahan berurut dari suku-suku barisan tersebut, yang disebut deret geometri.

Definisi :

Jika diketahui $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan suku-suku dari

barisan geometri, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ disebut

deret geometri , dengan $U_n = a\,r^{n-1}$.

Jika S_n merupakan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri, maka rumus umum untuk S_n dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \text{ maka}$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

Kalikan S_n dengan r

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

Kurangkan rS_n dengan S_n

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad -$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a\,(1 - r^n)$$

$$S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

Jadi rumus umum jumlah n suku pertama deret geometri adalah :

$$S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{untuk } r < 1$$

$$S_n = a\,\frac{(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{untuk } r > 1$$

Contoh

Hitunglah jumlah 7 suku pertama deret geometri $-2 + 1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} - \ldots$

Jawab :

$$-2 + 1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} - \ldots$$

Dalam hal ini : $a = -2$, $r = -\frac{1}{2}$, dan $n = 7$

Oleh karena $r = -\frac{1}{2} < 1$, maka gunakan rumus $S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r}$

$$S_7 = -2\,\frac{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2\left(1+\frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{-4\left(\frac{129}{128}\right)}{3}$$

$$S_7 = -4\left(\frac{129}{128}\right)\times\frac{1}{3} = -\frac{43}{32}$$

BAB VIII

MATRIKS

A. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom yang ditulis diantara tanda kurung ( ) atau [ ] atau | | | |

Susunan horizontal disebut dengan baris sedangkan susunan vertikal disebut dengan kolom

Bentuk Umum Matriks :

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \rightarrow \text{baris} \\ \rightarrow \text{baris} \\ \\ \rightarrow \text{baris} \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Kolom} & \text{Kolom} & & \text{Kolom} \end{array}
\end{array}
$$

a_{mn} adalah elemen atau unsur matriks yang terletak pada baris ke-m dankolom ke-n

Nama matriks ditulis dengan menggunakan huruf besar (huruf kapital) yakni A,B, P, Q, dsb. Sedangkan Unsur/elemen-elemen suatu matriks ditulis dengan huruf kecil sesuai nama matriks dengan indeks sesuai letak elemennya, seperti a_{11}, a_{12}, ...

B. Notasi Matriks

Matriks kita beri nama dengan huruf besar (huruf kapital) seperti A, B, C, dll. Matriks yang mempunyai *i* baris dan *j* kolom ditulis $A=(a_{ij})$, artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks *i* menyatakan baris ke *i* dan indeks *j* menyatakan kolom ke j dari elemen tersebut.

Secara umum :

Matriks $A=(a_{ij})$, i=1, 2, 3,…..m dan j=1, 2, 3,……., n yang berarti bahwa banyaknya baris m dan banyaknya kolom n.

Contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks	2 x 2
Jumlah baris	2
Jumlah kolom	2

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks	2 x 1
Jumlah baris	2
Jumlah kolom	1

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks	1 x 3
Jumlah baris	1
Jumlah kolom	3

Matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut matriks baris, sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut matriks kolom. Dua buah matriks A dan B dikatakan SAMA jika ukurannya sama ($m\ x\ n$) dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j

C. Jenis-jenis Matriks Khusus

Berikut ini diberikan beberapa jenis matriks selain matriks kolom dan matriks baris

1. Matriks Nol,

   Matriks yang semua elemennya nol

   Sifat-sifat :

   1. A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0
   2. A*0=0, begitu juga 0*A=0.

2. Matriks Bujursangkar

   Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, a_{33}, ….a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A tersebut.

   Contoh : Matriks berukuran 2x2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

3. Matriks Bujursangkar

   a. Bila A dan B merupakan matriks-matriks bujursangkar sedemikian sehingga AB=BA maka A dan B disebut commute (saing).

b. Bila A dan B sedemikian sehingga AB=-BA maka A dan B disebut anti commute.
c. Mtriks M dimana $M^{k+1}=M$ untuk k bilangan bulat positif disebut matriks periodik.
d. Jika k bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $M^{k+1}=M$ maka M disebut periodik dengan periode k.
e. Jika k=1 sehingga $M^2=M$ maka M disebut idempoten.
f. Matriks A dimana $A^p=0$ untuk p bilangan bulat positif disebut dengan matriks nilpoten.
g. Jika p bilangan positif bulat terkecil sedemikian hingga $A^p=0$ maka A disebut nilpoten dari indeks p.

4. Matriks Diagonal

matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

Contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

5. Matriks Satuan/Identity

Matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya adalah 1.

Contoh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks identitas :

1. A*I=A
2. I*A=A

6. Matriks Skalar

Matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu.

Contoh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

7. Matriks Segitiga Atas (Upper Triangular

Matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal elemennya sama dengan 0.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

8. Matriks Segitiga Bawah (Lower Triangular)

Matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal elemennya = 0.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

9. Matriks Simetris

Matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ dan } A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

D. Operasi Pada Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama. Jika A=(a_{ij}) dan B=(b_{ij}) adalah matriks-matriks berukuran sama, maka A+B adalah suatu matriks C=(c_{ij}) dimana (c_{ij}) = (a_{ij}) +(b_{ij}) atau [A]+[B] = [C] mempunyai ukuran yang sama dan elemennya (c_{ij}) = (a_{ij}) +(b_{ij})

Contoh

Diketahui

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{dan} \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2+0} & \mathbf{0+2} \\ \mathbf{1+1} & \mathbf{0+3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2+1} & \mathbf{0+2} \\ \mathbf{1+0} & \mathbf{0+3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Sama seperti pada penjumlahan matriks, pengurangan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jika ukurannya berlainan maka matriks hasil tidak terdefinisikan.

Contoh

Diketahui

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{da}n \ \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2-4} & \mathbf{3-2} \\ \mathbf{1-1} & \mathbf{0-3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2-1} & \mathbf{3-2} \\ \mathbf{1-0} & \mathbf{0-3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Matriks dengan Skalar

Jika k adalah suatu bilangan skalar dan A=(a_{ij}) maka matriks kA=(ka_{ij}) yaitu suatu matriks kA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k.

Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks. Misalnya [C]=k[A]=[A]k dan $(c_{ij}) = (ka_{ij})$

Contoh

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Maka

$$\mathbf{2}\boldsymbol{A} = \mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{1} & \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{2} & \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,(\mathbf{-2}) & \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{1} & \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

4. Perkalian Matriks dengan Matriks

Beberapa hal yang perlu diperhatikan :

1. Perkalian matriks dengan matriks umumnya tidak komutatif.
2. Syarat perkalian adalah jumlah banyaknya kolom pertama matriks sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.
3. Jika matriks A berukuran mxp dan matriks pxn maka perkalian A*B adalah suatu matriks $C=(c_{ij})$ berukuran mxn dimana

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Contoh 1

$$\boldsymbol{A = (2 \quad 3 \quad 1)\ dan\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Maka

$$\boldsymbol{A\ x\ B = (2 \quad 3 \quad 1) x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= [(2\ x\ 2\ ) + (3\ x\ 1) + (1\ x\ 0)] = (7)}$$

Contoh 2

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ dan\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Maka

$$\boldsymbol{A\ x\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ x \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= \begin{bmatrix} (2\ x\ 0) + (1\ x\ 3) + (1\ x\ 1) \\ (3\ x\ 0) + (1\ x\ 3) + (2\ x\ 1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Beberapa sifat perkalian matriks

1. Sifat Distributif, A*(B+C) = AB + AC
2. Sifat Assosiatif, A*(B*C) = (A*B)*C
3. Tidak Komutatif, A*B ≠ B*A
4. Jika A*B = 0, maka beberapa kemungkinan
   (i) A=0 dan B=0
   (ii) A=0 atau B=0
   (iii) A≠0 dan B≠0
5. Bila A*B = A*C, belum tentu B = C

E. Transpose Matriks

Transpose (putaran) matriks A yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris.

Transpose matriks A dinyatakan dengan A^T atau A'.

Contoh 3: Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ maka tentukan P^T

Jawab : $P^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(A^T) = A$

(iii) $k(A^T) = (kA)^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Buktikan sifat-sifat transpose diatas !

F. Latihan

1. Diketahui matriks P= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 9 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

   a. Berapakah ukuran matriks P?

   b. Tentukan mana yang merupakan baris 1, baris 2, baris 3 kolom 4, kolom 5 baris 1

   c. Tentukan P_{11}, P_{31}, P_{23}, P_{15}, P_{35}

2. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x_1 & 6 \\ -1 & 2 & x_2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1/2x_4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Carilah x_1 , x_2 , x_3 , x_4

3. Misalkan (mxn) menyatakan ukuran matriks. Cari hasil perkalian (kalau terdefinisi) dari ukuran-ukuran berikut.
   a. (2x1)(1x3)
   b. (4x5)(2x3)
   c. (1x1)(1x3)
   d. (3x3)(3x4)
   e. (2x2)(3x2)
4. Carilah AB dan BA jika

A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

   a. A= $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$
5. Diketahui

A= $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan

a. $2A, 3B, 2A\text{-}B, 3B\text{-}A$

b. $(2A\text{-}B)(3B\text{-}A)$

6. Selidikilah bahwa $AB \neq BA$ untuk $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & & \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. Matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

   Carilah matriks P sedemikian sehingga AP=B.

8. Carilah $3A2+2A\text{-}3I2$, jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Carilah A^T jika A

a. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

BAB IX

LIMIT FUNGSI

A. Limit Fungsi Aljabar

1. Pengertian Limit Fungsi

Limit dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tersebut.

Untuk dapat memahami pengertian limit secara intuitif, perhatikanlah contoh berikut:

Fungsi f di definisikan sebagai f (x) = $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Jika variabel x diganti dengan 2, maka f(x) = $\frac{0}{0}$ (tidak dapat ditemukan)

Untuk itu perhatikanlah tabel berikut :

x	0	1, 1	1, 5	1, 9	1,99 9	2.00 0	2,00 1	2,0 1	2, 5	2, 7
f(x)	1	2, 1	2, 5	2, 9	2,99 9	???	3,00 1	3,0 1	3, 5	3, 7

Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa f (x) = $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$: mendekati 3. jika x mendekati 2, baik didekati dari sebelah kiri (disebut limit kiri) maupun di dekati dari sebelah kanan (disebut limit kanan). Dapat ditulis :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$$

2. Menentukan Limit Fungsi Aljabar

a. Substitusi

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh

Tentukan nilai $\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 8\right)$!

Penyelesaian :

Nilai limit dari fungsi f(x) = $x^2 – 8$ dapat kita ketahui secara langsung, yaitu dengan cara mensubstitusikan x =3 ke f(x)

$$\lim_{x \to 3}\left(x^2 - 8\right) = 3^2 - 8 = 9 - 8$$

$$= 1$$

Artinya bilamana x dekat 3 maka $x^2 – 8$ dekat pada $3^2 – 8 = 9 – 8 = 1$ Dengan ketentuan sebagai berikut:

a) Jika f (a) = c, maka $\lim_{x \to a} f(x) = a$

b) Jika f (a) = $\frac{c}{0}$, maka $\lim_{x \to a} f(x) = \sim$

c) Jika f (a) = $\frac{0}{c}$, maka $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

b. Pemfaktoran

Cara ini digunakan ketika fungsi-fungsi tersebut bisa difaktorkan sehingga tidak menghasilkan nilai tak terdefinisi.

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh

Tentukan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$!

Jika x = 3 kita substitusikan maka $f(3) = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$.

Kita telah mengetahui bahwa semua bilangan yang dibagi dengan 0 tidak terdefinisi. Ini berarti untuk menentukan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal menfaktorkan fungsi f (x) sehingga menjadi:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3). \left(\frac{x-3}{x-3}\right) = 1$$

Jadi, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$= \lim_{x \to 3} (x+3)$

$= 3 + 3 = 6$

c. Merasionalkan Penyebut

Cara yang ke-tiga ini digunakan apanila penyebutnya berbentuk akar yang perlu dirasionalkan, sehingga tidak terjadi pembagian angka 0 dengan 0.

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}}$!

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x-2}\right)}{(x-2)} \\
&= \lim_{x \to 2} (x-1)\sqrt{x-2} \\
&= (2-1).\sqrt{2-2} \\
&= 1 \, . \, 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

d. Merasionalkan Pembilang

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh

Tentukan nilai $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3}}{x-1}$!

Penyelesaian

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 - \left(\sqrt{4x-3}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x+1}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3.1-2} + \sqrt{4.1-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

3. Menentukan Limit Fungsi Aljabar Bila Variabelnya Mendekati Tak Berhingga

Bentuk limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati tak berhingga,diantaranya:

$$\lim_{x\to\sim}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ dan } \lim_{x\to\sim}\left[f(x)\pm g(x)\right]$$

Untuk menentukan nilai limit dari bentuk-bentuk tersebut, dapat dilakukan cara-cara sebagai berikut:

a. Membagi dengan pangkat tertinggi

Cara ini digunakan untuk mencari nilai $\lim_{x\to\sim}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Caranya dengan membagi f(x) dan g(x) dengan pangkat yang tertinggi dari n yang terdapat pada f(x) atau g (x).

Contoh

Tentukan nilai limit dari:

1. $\lim_{x\to\sim}\frac{4x-1}{2x+1}$
2. $\lim_{x\to\sim}\frac{4x+1}{x^2-x}$

Penyelesaian

1. Untuk menentukan nilai dari $\lim_{x \to \sim} \frac{4x-1}{2x+1}$

   perhatikan pangkat tertinggi dari x pada f (x) = 4x – 1 dan g(x) = 2x + 1. ternyata pangkat tertinggi dari x adalah satu.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{4x-1}{2x+1} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{4 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{\sim}}{2 + \frac{1}{\sim}}$$

$$= \frac{4-0}{2+0} = \frac{4}{2} = 2$$

2. Perhatikan fungsi h (x) = $\frac{4x+1}{x^2-2}$!

   Fungsi tersebut memiliki x dengan pangkat tertinggi 2, yaitu x^2 yang terdapat pada $x^2 - 2$.

jadi, untuk menentukan nilai $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{4x+1}{x^2 - x}$ maka fungsi 4x + 1 dan $x^2 - 2$ harus dibagi dengan x^2

.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{4x+1}{x^2 - x} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{\sim} + \frac{1}{(\sim)^2}}{1 - \frac{2}{(\sim)^2}}$$

$$= \frac{0+0}{1-0}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

b. Mengalikan dengan faktor lawan

Cara ini digunakan untuk menyelesaikan $\lim\limits_{x \to \sim}[f(x) \pm g(x)]$. Jika kita dimitai menyelesaikan $\lim\limits_{x \to \sim}[f(x) \pm g(x)]$ maka kita harus mengalikan [f (x) + g (x)] dengan $\frac{[\text{f } (\text{x}) - \text{g } (\text{x})]}{[\text{f } (\text{x}) - \text{g } (\text{x})]}$ sehingga bentuknya menjadi:

$$\lim_{x \to \sim}[f(x) \pm g(x)].\ \frac{[\text{f } (\text{x}) - \text{g } (\text{x})]}{[\text{f } (\text{x}) - \text{g } (\text{x})]}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\{[\text{f } (\text{x})]^2 - [\text{g } (\text{x})]^2\}}{\text{f } (\text{x}) - \text{g } (\text{x})} \text{ ataupun sebaliknya.}$$

Contoh

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \sim} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$

Penyelesaian

$$\lim_{x \to \sim} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} \quad = \quad \lim_{x \to \sim} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} \quad .$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{(x^2 + 2) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

B. Teorema Limit

Teorema limit yang akan disajikan berikut ini yang sangat berguna dalam menangani hampir semua masalah limit. Misalkan *n* bilangan bulat positif, *k* sebuah konstanta dan *f, g* adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di *a* maka:

1. $\lim\limits_{x \to a} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x \to a} k\, \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{k} \lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(\mathrm{x})$
4. $\lim\limits_{x \to a} [\mathrm{f}(\mathrm{x}) \pm \mathrm{g}(\mathrm{x})] = \lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \pm \lim\limits_{x \to a} \mathrm{g}(\mathrm{x})$
5. $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{v}\, [\mathrm{f}(\mathrm{x}) \,.\, \mathrm{g}(\mathrm{x})] = \lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \,.\, \lim\limits_{x \to a} \mathrm{g}(\mathrm{x})$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, dimana $\lim\limits_{x\to a}$ g(x) $\neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to a}$ [f (x)]^n = [$\lim\limits_{x\to a}$ f (x)]^n

8. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ dimana

$\lim\limits_{x\to a}$ f (x) $\geq$ 0 untuk *n* bilangan genap

$\lim\limits_{x\to a}$ f (x) $\leq$ 0 untuk *n* bilangan ganjil

Contoh:

Carilah a. $\lim\limits_{x\to 4}\left(3x^2-x\right)$! b. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+9}{2x}}$

Penyelesaian:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3x^2-x\right)$ = $\lim\limits_{x\to 4} 3x^2-\lim\limits_{x\to 4} x$ (teorema 4)

= 3 $\lim\limits_{x\to 4} x^2-\lim\limits_{x\to 4} x$ (teorema 3)

= 3 $\left[\lim\limits_{x\to 4} x\right]^2-\lim\limits_{x\to 4} x$ (teorema 7)

= 3. $(4)^2 - 4$ (teorema 2)

$= 3.\ 16 - 4 \quad = 44$

b) $$\lim_{x\to3}\sqrt{\frac{x^2+9}{2x}} = \frac{\lim_{x\to3}\sqrt{x^2+9}}{\lim_{x\to3}2x} \text{ (teorema 6)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to3}(x^2+9)}}{2\lim_{x\to3}x} \text{ (teorema 8 dan 3)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to3}x^2+\lim_{x\to3}9}}{2\lim_{x\to3}x} \text{ (teorema 4)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\lim_{x\to3}x)^2+\lim_{x\to3}9}}{2\lim_{x\to3}x} \text{ (teorema 7)}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2+9}}{2.3} \text{ (teorema 1 dan 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3}{6}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

C. Limit Fungsi Trigonometri

Rumus limit fungsi trigonometri:

a. Limit fungsi sinus

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\sin ax} = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

b. Limit fungsi tangens

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\tan ax} = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{ax} = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

Contoh

Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi trigonometri berikut!

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$

Penyelesaian

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} . \dfrac{3x}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{2x}$

$= 1 \;.\; \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} . \dfrac{2x}{\sin 2x} . \dfrac{5x}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 2x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{2x}$

$= 1 . 1 \;.\; \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$

BAB X

TURUNAN

A. Turunan Fungsi Aljabar

1. Pengertian turunan fungsi aljabar

Misalkan y adalah fungsi dari x atau y maka di tulis y = f(x), maka

turunan pertama fungsi tersebut terhadap variabel x di tulis dengan:

$$f^{-1}(x) \text{ atau } y' \text{ atau } \frac{df(x)}{dx} \text{ atau } \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dari definisi tersebut dapat diturunkan sejumlah rumus

a. Jika $y = f^{-1}(x) = ax^n$ dengan a konstanta real, maka $\frac{dy}{dx} = n.ax^{n-1}$

Contoh

$f(x) = 2x^4$ maka $f^{-1}(x) = 2 \,.\, 4x^{4-1} = 8x^3$

b. Jika $f(x) = a$ (konstanta) maka $f^{-1}(x) = 0$

Contoh

$f(x) = 2$ maka $f^{-1}(x) = 0$

c. Jika $f(x) = ax$ maka $f^{-1}(x) = a$

Contoh

$f(x) = 2x$ maka $f^{-1}(x) = 2$

d. Jika $f(x) = f(x) + g(x)$ maka $f^{-1}(x) = f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$

Contoh

$f(x) = x^3 + 2x^2$ maka $f^{-1}(x) = 3x^2 + 4x$

e. Jika $f(x) = f(x) \,.\, g(x)$ maka $f^{-1}(x) = f(x).\, g(x) + g(x)\, .f(x)$

Contoh

$f(x) = x^2(x^2 + 2)$

$f(x) = x^2$ maka $f^{-1}(x) = 2x$

$g(x) = x^2 + 3$ maka $g^{-1}(x) = 2x$

$y \quad = 2x(x^2 + 2) + 2x(x^2) = 4x^3 + 4x$

f. Jika $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ maka $f^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x).g(x) - g^{-1}(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

g. Jika $f(x) = \ln x$ maka $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}.\, f(x)$

h. Jika $f(x) = e^{f(x)}$ maka $f^{-1}(x) = e^{f(x)} . f^{-1}(x)$

2. Penerapan turunan

1) Menentukan gradient dan persamaan garis singgung

a. Gradient (m) garis singgung di titik (x_1 , y_1) pada kurva $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan

$m = f^{-1}(x_1)$

Contoh

Tentukan gradient garis singgung kurva $y = x^2 + 3x$ di titik (1, 4)

Pembahasan

$y = x^2 + 3x$

$= 2x + 3$

$m = f(1) = 2 .1 + 3 = 2 + 3 = 5$

b. Persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik (x_1 , y_1) pada kurva $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan

$y - y_1 = m(x - x_1)$

contoh

Persamaan garis singgung pada kurva $y = 20 - x^4$ yang bergradien 32 adalah …

Penyelesaian

$m = 32$

$y' = 32$

$-4x^3 = 32$

$x^3 = -8$

$x = -2$

$y = 20 - x^4 = 20 -(16) = 4$

$y - y1 = m(x - x1)$

$y - 4 = 32(x + 2)$

$y - 4 = 32x + 64$

$y = 32x + 68$

jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 32x + 68$

2) Menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi f(x)

Nilai maksimum dan minimum suatu fungsi sering diistilahkan dengan nilai ekstrim atau nilai stasioner dari fungsi tersebut. Nilai ekstrim dari fungsi y = f(x) didapat jika $f^{-1}(x) = 0$

Contoh

Jika $y = x^3 – 3x^2 – 24x -7$ maka nilai stasioner dari fungsi tersebut adalah….

Penyelesaian

$y \; = x^3 – 3x^2 – 24x -7$

$y \; = 3x – 6x^2 – 24$

$y \; = 0$

$3x – 6x^2 – 24 \qquad = 0$

$(x^2 – 2x – 8) \qquad = 0$

$(x – 4)(x + 2) \qquad = 0$

$x_1 = 4$ dan $x_2 = -2$

fungsi maksimum pada x = -2 maka nilai balik maksimumnya

$f(-2) \; = (4)^3 – 3(-2)^2 -24(-2) – 7$

$= 8 - 12 + 48 – 96 – 7$

$= -87$

B. Turunan Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus turunan fungsi trigonometri

1. $f(x) = \sin x$ maka $f^{-1}(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos x$ maka $f^{-1}(x) = -\sin x$
3. $f^{-1}(x) = \sec^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$

Contoh

1. Turunan pertama dari fungsi $y = \cos (3x^3 – 2x^2)$= ….

   Penyelesaian

   $y = \cos (3x^3 – 2x^2)$

   Misalkan

   $u(x) = 3x^3 – 2x^2$ maka $u'(x) = 9x^2 - 4x$

   $y = \cos u'(x)$

   $y' = (-\sin u(x) . u'(x))$

   $= -\sin (3x^3 – 2x^2) . (9x^2 - 4x)$

   $= -(9x^2 - 4x) \sin (3x^3 – 2x^2)$

2. Jika $y = x^2 \sin 2x$ maka $y' = ...$

Penyelesaian

$y = x^2 \sin 2x$

Misalkan

$u(x) = x^2$ maka $u'(x) = 2x$

$v(x) = \sin 2x$ maka $v'(x) = 2 \cos 2x$

$y \quad = u(x) . v(x)$

$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\quad = 2x(\sin 2x) + x^2(2 \cos 2x)$

$\quad = 2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x$

C. Latihan

1. Turunan fungsi f(x) = (5x-3) (2x2+1) adalah.....
2. Turunan fungsi f(x) = adalah....
3. Turunan fungsi f(x) = adalah ....
4. Jika $f(x) = (x^2+1)(x^3-1)$, maka turunannya adalah......
5. Diketahui kurva $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ dan P(2,4). Persamaan garis singgung di P

6. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 5x - 2$ di titik yang berbasis 1 adalah…..

7. Diketahui titik P terletak pada kurva $y = x^2 + x - 7$. Garis singgung pada kurva tersebut melalui titik P dan sejajar dengan garis $6x - 2x - 5 = 0$ Koordinat titik P adalah….

8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12$ turun pada interval…

9. Nilai stasioner fungsi $f(x) = 9x^2 - 4x + 9$ adalah…..

10. Titik belok fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 9$ adalah….

11. Fungsi $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x - 20$ mencapai maksimum untuk nilai x =……

12. Fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ turun pada interval…..

13. Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 2x + 1$

Fungsi f(x) mempunyai nilai stasioner pada x = -2 untuk nilai a = ……

14. Nilai maksimum fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9$ dalam interval $-3 \le x \le 2$ adalah…….

15. Pada daerah asal $0 \leq x \leq 2$, kurva fungsi: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ ……..
16. Jumlah dua buah bilangan sama dengan 150. Jika perkalian salah satu bilangan dengan kuadrat bilangan lainnya maksimum, bilangan-bilangan itu adalah….
17. Turunan kedua fungsi $f(x) = (3x-1)^3$ adalah
18. Jika $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ dan $f'(x) = 10$ maka nilai a =
19. jika $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ maka nilai $f(2) =$
20. Jika persamaam fungsi $y = x^3 - 5x^2$, maka koordinat titik A
21. Garis singgung kurva $y = x^3 - 3x + 4$ dititik p sejajar dengan garis $9x - y = 7$ maka koordinat titik p =
22. Persamaan garis singgung parabola $y = 2x^2 + 1$ yang ditarik melalui titik (2,9) adalah
23. Jika di ketahui $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 20$ maka fungsi f turun pada interval:

24. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 8$ adalah

25. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = - x^3 + 6x^2 - 12x + 5$ adalah

26. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 3$, mencapai maximum pada titik x =

27. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 3$ mencapai minimum pada titik x =

28. Jika $f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 4}$ maka turunan dari $f'(x)$ adalah

29. Jika fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 2x + 8$ maka fungsi f(x) cekung ke bawah pada interval

30. Jika fungsi biaya total c = Q3 – Q2 + 12Q – 5 fungsi marginal, dinyatakan MC adalah turunan dari fungsi biaya total terhadap Q, dengan Q menyatakan jumlah produk, maka berapa unit produksi agar biaya total minimum

31. Turunan pertama dari $f(x) = \sin 2(3x^2 - 2)$ adalah $f'(x) = \ldots.$

32. Jika $f(x) = \sin^2 (2x + \pi/6)$, maka nilai $f'(0) = \ldots.$

33. Turunan dari f(x) = $\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$ adalah f'(x) = ….

34. Turunan pertama f(x) = $\cos^3 x$ adalah ….

35. Jika f(x) = $(2x-1)^2(x+2)$, maka f'(x) = ….

BAB XI

INTEGRAL

A. Integral Tak Tentu

1. Pengertian integral

Untuk mengetahui pengertian integral, akan lebih mudah jika kita pahami dulu materi turunan yang telah dipelajari sebelumnya.

Definisi :

Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi F(x) yang kontinu pada interval $[a, b]$ diperoleh $\frac{d(F(x))}{dx}$ = F'(x) = $f(x)$. Antiturunan dari $f(x)$ adalah mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$, ditulis $\int f(x)\, dx$

Secara umum dapat kita tuliskan :

$\int f(x)\, dx = \int F'(x)\, dx = F(x) + C$

Dimana

$\int f(x)\, dx$: disebut unsur integrasi, dibaca " integral $f(x)$ terhadap x"

$f(x)$: disebut integran (yang diitegralkan)

$F(x)$: disebut fungsi asal (fungsi primitive, fungsi pokok)

C : disebut konstanta / tetapan integrasi

2. Sifat-sifat integral

Integral fungsi aljabar

1. $\int k\, dx = k\,x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ bila $n \neq -1$

3. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1`} x^{n+1`} + c,$ dengan $n \neq -1$

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

5. $\int a.f(x)dx = a\int f(x)dx,$ dimana a konstanta sebarang.

Integral fungsi trigonometri

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

2. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

3. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

4. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

Untuk mengerjakan integral fungsi trigonometri akan digunakan kesamaan-kesamaan sebagai berikut:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 4. $\sin x . \cos x =$

$\frac{1}{2}\sin 2x$

2. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ 5. $1 - \cos x = 2$

$\sin^2 \frac{1}{2}x$

3. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ 6. $1 + \cos x = 2$

$\cos^2 \frac{1}{2}x$

Contoh

1. $\int x^5 \text{ dx} = \frac{x^6}{6} + C$

2. $\int \sqrt[3]{x} \text{ dx} = \int x^{\frac{1}{3}} \text{ dx} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

3. $\int (2x^2 - 5x + 3) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

4. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1` - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

5. $\int 4dx = 4x + \text{C}$

B. Integral Tertentu

Integral tertentu dinotasikan dengan

$$\int_a^b f(x) \text{ dx} = [F(x)]_a^b = \text{F(b)} - \text{F(a)}$$

Dimana

$f(x)$ adalah integran, yaitu $f(x) = F'(x)$

a, b adalah batas-batas pengintegralan

[a, b] adalah interval pengintegralan

Contoh

1. $\int_{-2}^{2} x^3 \text{ dx} = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{1}{4}(2)^4\right] - \left[\frac{1}{4}(-2)^4\right] = (4 - 4)$

$= 0$

2. $\int_{0}^{2} (x^2 + 4x) \text{ dx} = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{0}^{2} =$

$\left[\frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2\right]$

$= (8/3 + 8) - (0 +$

$0) = 10\ \frac{2}{3}$

3. $\int_{0}^{\frac{\eta}{2}} \cos^2 x \text{ dx} = \int_{0}^{\frac{\eta}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \text{ dx} = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\eta}{2}}$

$= \left[\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2(\frac{\pi}{2})\right]$

$=$

$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) + \frac{1}{4}(0 - 0) = \frac{\pi}{4}$

C. Teknik Pengintegralan

1. Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

$$\int [f(u)\frac{du}{dx}]dx = \int f(u)du$$

Contoh

a. Tentukan $\int 2x(x^2+3)^4\,dx$!

b. Tentukan $\int \sin^3 x.\cos x\, \mathrm{d}x$!

Penyelesaian

a. Misalkan $u = x^2+3$, maka $\frac{du}{dx} = 2x$ atau $dx = \frac{du}{2x}$

Sehingga diperoleh, $\int 2x(x^2+3)^4\,dx = \int 2x\,u^4\,\frac{du}{2x}$

$$= \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5}(x^2+3)^5 + C$$

b. Misalkan $u = \sin x$, maka $\frac{du}{dx} = \cos x$ atau $dx = \frac{du}{\cos x}$

Sehingga diperoleh, $\int \sin^3 x . \cos x \, dx = \int u^3 \cos x \frac{du}{\cos x}$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

2. Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi. Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

$$y = u.v \rightarrow \quad dy = du.v + u.dv$$

$$\int dy = \int v \, du + \int u \, dv$$

$$y = \int v \, du + \int u \, dv$$

$$u.v = \int v \, du + \int u \, dv$$

$$\int u \, dv = u.v - \int v \, du$$

pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\int u\,v' = uv - \int u'v$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

pengintegralan parsial integral tertentu

$$\int_a^b u\,v' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Contoh

Tentukan $\int x^2 \sin x \; dx$

Penyelesaian

dengan menggunakan rumus $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Misal : $u = x^2, \rightarrow du = 2x dx$

$dv = \sin x\, dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$

sehingga diperoleh,

$$\int x^2 \sin x \; dx = x^2.(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx$$

$$= x^2.(-\cos x) + \int \cos x.2x dx$$

$$= -x^2.\cos x + 2\,(x.\sin x - \int \sin x dx)$$

$= -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C$

D. Latihan

1. Tentukan integral dari

a. $\int (2-3x)^2$ dx.

b. $\int 2\sin x dx$

c. $\int (1+\sqrt[3]{x})$ dx.

d. $\int \frac{2x-1}{x^2}$ dx.

e. $\int x\sqrt{x}$ dx

f. $\int \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ dx.

g. $\int (\cos x + \sin 2x)$ dx.

h. $\int \cos^2 x$ dx.

i. $\int 3x(x+1)$ dx.

j. $\int \frac{dx}{3\sqrt{x^5}}$ dx.

2. Selesaikanlah integral di bawah ini

a. $\int_0^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx =$

b. $\int_{-2}^0 (2-x)\, dx =$

c. 8. $\int_{1/4\eta}^{1/2\eta} \sin 2x dx =$

3. Selesaikan integral berikut dengan teknik substitusi atau integral parsial!

a. $\int x^2 \cdot \sin x^3 dx$

b. $\int 2x\sqrt{x^2 - 4}dx$

c. $\int \sqrt{x + 7}dx$

d. $\int 3x(x - 7)^5 dx$

e. $\int -2x.\cos(x + 3)dx$

e. $\int 3x(x^2 + 5)^5 dx$

f. $\int 2x.\sin(x^2 + 3)dx$

g. $\int x^2 \cdot \sin x dx$

h. $\int -x\sqrt{x + 7}dx$

i. $\int 3x \cdot \sin 6x dx$

REFERENSI

Anton, H & Rorres. C. (2004). Aljabar Linier Elementer, Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan Jilid 1. Erlangga, Jakarta

Anton, H. 1984. Aljabar Linear Elementer, Edisi Ketiga. Erlangga, Bandung

Cahyono, H. (2005). Matematika Sekolah. Klaten : PT Intan Pariwara.

Depdiknas (2006). Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas (SMA) dan Madrasah Aliyah (MA), Jakarta : Pusat Kurikulum Balitbang.

Meyer, C. D. 2000. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM

Purcell, E. J & Varbeg, D. (2005). Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1. Edisi 5. Jakarta. Erlangga, Jakarta.

Ricardo, H. J. (2009). A Modern Introduction to Differential Equations. Edisi 2,. London. Elsevier Academic Press.

Setiadji. tanpa tahun. Matriks Invers Tergeneralisasi. FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Sinaga, B. dkk. (2014). Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas X Semester 1. Jakarta : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

INDEX

D

E

F

G

H

I

K

TENTANG PENULIS

Dr. Lalu Muhammad Fauzi, M.Pd.Si lahir di Desa Suralaga Kecamatan Suralaga Kab. Lombok Timur, 12 Februari 1973. Menyelesaikan pendidikan SD tahun 1985 di SDN 2 Suralaga, SMP tahun 1988 di SMPN 1 Terara, SMA tahun 1991 di SMA Muhammadiyah Mataram.

Setelah tamat SMA kemudian melanjutkan studi pada jenjang Diploma 3 (D3) pada Program Studi Pendidikan Matematika di IKIP Mataram selesai tahun 1995. Selepas D3, pada tahun 1996 mulai mengajar di MA dan MTs NW Suralaga sampai dengan tahun 1999, mengajar di SMA Assunah Bagik Nyaka pada tahun 1998-2001, mengajar di SMA N 1 Aikmel pada tahun 1998 – 2001, mengajar di SMAN 2 Aikmel pada tahun 1999-2008, Pada tahun 1999 melanjutkan kuliah lagi di STKIP Hamzanwadi Pancor pada Jurusan Pendidikan Matematika dan selesai pada tahun 2006. Setelah selesai S1 dipercayakan mengajar di IKIP Mataram mulai tahun 2006-2008. Pada tahun 2008 kembali melanjutkan studi di pascasarjana UNY pada Program Studi Pendidikan Matematika selesai pada tahun 2010. Pada tahun 2017 kembali lagi menyelesaikan S3 pada kampus yang sama yakni UNY pada program studi Ilmu Pendidikan Konsentrasi Pendidikan Matematika dan selesai pada tahun 2021 dengan kajian disertasi Etnomatematika pada Hunian Tradisional masyarakat suku Sasak. Mulai tahun 2006 menjadi Dosen tetap di Universitas Hamzanwadi sampai dengan saat ini.

Muhammad Gazali, M.Pd. lahir di Desa Tebaban Kecamatan Suralaga Kab. Lombok Timur, 28 Juli 1986. Menyelesaikan pendidikan SD tahun 2000 di SDN 2 Tebaban, SMP tahun 2003 di MTs NW Tebaban, SMA tahun 2006 di MA NW Pancor.

Setelah tamat SMA kemudian melanjutkan di s1 Pendidikan Matematika di STKIP Hamzanwadi Selong selesai tahun 2010. Selepas S1 Pada tahun 2011 kembali melanjutkan studi di pascasarjana Universitas Sebelas Maret Surakarta (UNS) pada program studi Pendidikan Matematika selesai pada tahun 2013. Pada tahun 2013 mulai mengajar di Madrasah Aliyah Muallimat Nahdlatul Wathan Pancor sampai dengan sekarang. Selain itu pada tahun yang sama menjadi Dosen tetap di Universitas Hamzanwadi sampai dengan saat ini.

Jatmiko, M.Pd lahir di Dusun Kaliulo Desa Pehserut Kecamatan Sukomoro Kabupaten Nganjuk, Jawa Timur, 18 Juni 1987. Menyelesaikan SD tahun 2000 di SDN Pehserut 2, SMP tahun 2003 di SMPN 1 Sukomoro, dan SMA tahun 2006 di SMAN 1 Sukomoro. Setelah tamat SMA kemudian melanjutkan di S1 Pendidikan Matematika Universitas Nusantara PGRI Kediri selesai tahun 2010. Selepas S1, pada tahun 2011 langsung melanjutkan S2 Pendidikan Matematika di Universitas Sebelas Maret Surakarta selesai pada tahun 2014. Saat ini penulis masih menyelesaikan Studi jenjang S3 di Prodi Ilmu Pendidikan Konsentrasi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta. Penulis sempat mengajar di SMK NU pace, Nganjuk pada tahun 2010 sampai 2014. Pada tahun 2014 dipercaya mengajar dan menjadi Dosen Tetap di Prodi Pedidikan Matematika Universitas Nusantara PGRI Kediri sampai sekarang.