Kata Pengantar

Dengan mengucapkan syukur alhamdulillah, akhirnya modul vektor dapat diselesaikan. Modul ini merupakan modul pertama yang dibuat oleh penulis. Pembuatan modul ini dimaksudkan untuk membimbing peserta didik SMA/MA dalam memahami materi vektor.

Dalam pembahasan modul ini, akan dikaji lebih dalam tentang pengertian vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga, serta penerapan konsep vektor untuk pemecahan masalah dalam kehidupan nyata.

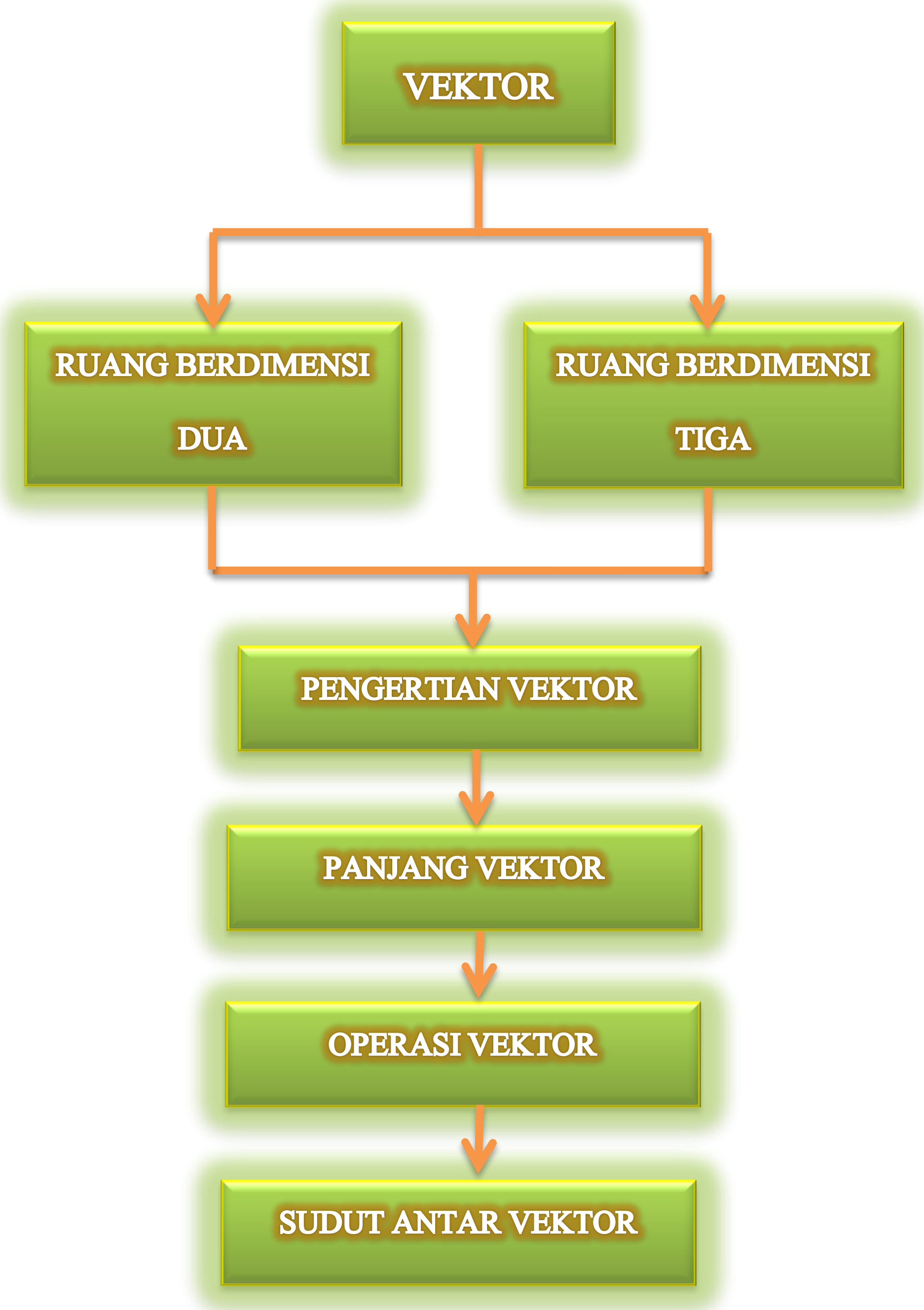
Penulis menyadari bahwa dalam penulisan modul ini masih banyak kekurangan yang terjadi. Untuk itu adanya saran dan kritik dari pembaca sangat diperlukan penulis untuk perbaikan modul ini dimasa mendatang. Penulis juga mengucapkan terima kasih terhadap semua pihak yang telah membantu dalam pembuatan modul ini.

Pancor , 23 Maret 2019

Penulis

Daftar Isi

Peta Konsep


VEKTOR
RUANG BERDIMENSI DUA
RUANG BERDIMENSI TIGA
PENGERTIAN VEKTOR
PANJANG VEKTOR
OPERASI VEKTOR
SUDUT ANTAR VEKTOR

GLOSARIUM

NO	ISTILAH	PENGERTIAN
1	Vektor	Vektor adalah besaran yang mempunyai nilai satuan dan arah.
2	Skalar	Skalar adalah besaran yang mempunyai nilai satuan tanpa arah

BAB I PENDAHULUAN

A. KI DAN KD

KOMPETENSI INTI

3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.

KOMPETENSI DASAR

3.2 Menjelaskan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga.

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga.

B. DESKRIPSI

Dalam modul ini anda akan mempelajari tentang pengertian vektor, panjang vektor, operasi vektor yang meliputi penjumlahan dan pengurangan vektor, perkalian skalar dengan vektor dan sifat-sifat hitung pada vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga serta penerapan konsep vektor untuk pemecahan masalah dalam kehidupan nyata.

C. WAKTU

Waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pembelajaran dalam modul ii adalah 3 pertemuan (6 x 45 Menit)

D. MATERI PRASYARAT

Sebelum mempelajari materi vektor, sebaiknya Anda mengingat kembali materi prasyaratnya terlebih dahulu. Adapun materi prasyarat sebelum mempelajari materi vektor yaitu :

1. Operasi Bilangan Real
2. Dasar Trigonometri
3. Matriks

E. PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

a. Penjelasan Bagi Peserta Didik

1. Berdoalah kepada Tuhan Yang Maha Esa sebelum mulai belajar
2. Bacalah modul ini dengan seksama mulai dari kata pengantar sampai dengan cek penguasaan, kemudian pahami benar seluruh informasi yang termuat di dalamnya.
3. Pelajari dan pahami semua materi vektor yang ada pada modul ini.
4. Laksanakan semua latihan, tugas dan tes yang terdapat dalam modul ini agar kompetensi Anda berkembang dengan baik.
5. Kerjakan kegiatan praktek untuk mendalami isi modul dan menambah pengetahuan Anda.

6. Diskusikan dengan teman-teman Anda dalam mengatasi materi yang belum Anda pahami.
7. Kerjakan tes kognitif dan tes psikomotorik yang terdapat di akhir modul ini dengan sikap disiplin dan mandiri untuk mengevaluasi pengetahuan Anda setelelah mempelajari materi vektor pada modul ini.

b. Peranan Guru

1. Membantu siswa dalam merencanakan proses belajar.
2. Menegaskan kembali tentang tujuan akhir yang harus dicapai setelah mempelajari modul ini.
3. Membantu peserta didik dalam menentukan dan mengakses sumber tambahan lain yang diperlukan untuk belajar.
4. Melaksanakan penilaian serta mencatat pencapaian kemajuan peserta didik
5. Menjelaskan kepada peserta didik mengenai bagian yang perlu untuk dibenahi dan merundingkan rencana pembelajaran selanjutnya.

F. TUJUAN AKHIR

Dengan adanya modul ini, diharapkan dapat membantu siswa dalam memahami dan mengausai materi matematika tentang vektor secara mandiri.

G. CEK PENGUASAAN SK

Berilah tanda (√) pada bagian yang sesuai dengan pengetahuan Anda!

BAHASAN	YA	TIDAK
Apakah anda sudah mengetahui apa itu vektor?		
Apakah anda sudah mengetahui apa itu skalar?		
Apakah anda sudah bisa membedakan antara vektor dengan skalar?		
Apakah anda sudah mengetahui rumus panjang vektor di R^2 maupun di R^3?		
Apakah anda sudah mengetahui rumus-rumus pada operasi vektor?		
Apakah anda sudah mengetahui rumus besar sudut antara dua vektor?		

Bila Anda memberi tanda (√) pada bagian "TIDAK" lebih dari 2 nomor maka Anda disarankan untuk mempelajari lebih lanjut modul ini.

BAB II PEMBELAJARAN

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Menjelaskan pengertian vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga.
2. Memecahkan masalah kehidupan nyata menggunakan konsep vektor

B. ILUSTRASI

Sumber: http://images.encarta.msn.com

Pernahkah kalian melihat lembing yang meluncur di udara saat dilempar oleh atlet lempar lembing? Lembing tersebut meluncur dengan kecepatan dan arah tertentu sesuai dengan keinginan sang atlet. Dalam matematika, lembing yang meluncur ini mewakili sebuah vektor, yaitu suatu besaran yang memiliki besar dan arah. Agar kalian lebih memahami tentang vektor ini, pelajarilah materi berikut.

C. PENGERTIAN VEKTOR

Untuk memahami tentang vektor, lakukanlah kegiatan berikut.

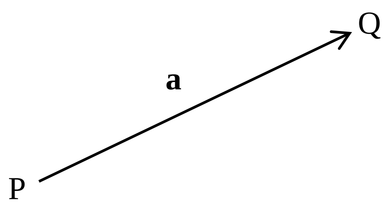
Aktivitas Kelompok

1. Gambarlah sebuah ruas garis pada selembar kertas!
2. Berilah tanda panah pada ujung ruas garis tersebut!
3. Sebut titik pangkal ruas garis sebagai titik P dan titik ujungnya sebagai titik Q.
4. Ukurlah panjang ruas garis dengan menggunakan penggaris!
5. Diskusikan dengan teman sekelompokmu!
6. Apa yang dapat disimpulkan dari aktivitas ini? Kemukakan hasil kegiatan ini di depan kelas!

Ruas garis berarah yang kalian gambar pada kegiatan ini mewakili sebuah vektor. Panjang garis yang diukur menggunakan penggaris menunjukkan panjang vektor tersebut. Karena titik pangkal P dan titik ujung Q, maka vektor disebut sebagai vektor $\overline{PQ}$. Panjang vektor $\overline{PQ}$ ini dilambangkan dengan $|\overline{PQ}|$.

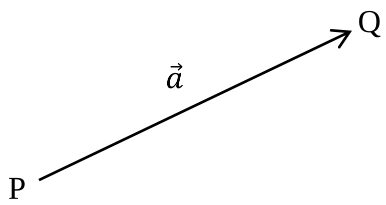
Selain cara di atas, sebuah vektor dapat pula ditulis menggunakan :

- huruf kecil yang dicetak tebal.
  Seperti **a**, **b**, **c**, dan sebagainya.



  Misalnya, vektor $\overline{PQ}$ di atas dapat ditulis sebagai vektor **a**.

- huruf kecil yang di atas huruf itu dibubuhi tanda panah.
  Seperti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dan sebagainya.

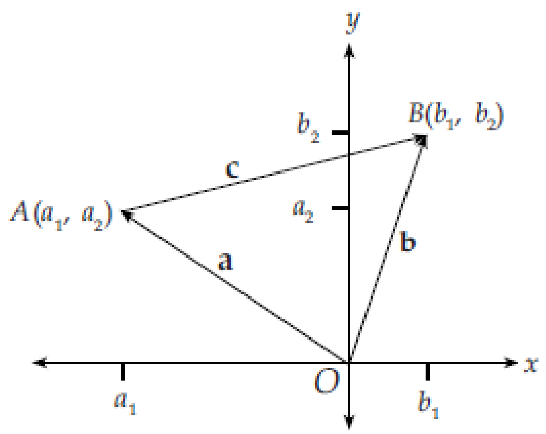


Misalnya vektor $\overline{PQ}$ di atas dapat ditulis sebagai vektor $\vec{a}$.

Penulisan vektor dengan menggunakan lambang panah di atas lebih sering digunakan. Karena mnggunakan tulisan tangan, vektor yang dibubuhi tanda panah lebih mudah dituliskan daripada yang dicetak tebal. Kalian bebas memilih cara penulisan vektor tersebut.

D. PANJANG VEKTOR

Perhatikan sebarang titik $A(a_1,a_2)$ dan titik $B(b_1,b_2)$ pada koordinat Cartesius berikut.



Gambar 1

Titik $A(a_1,a_2)$ dan $B(b_1,b_2)$ pada koordinat Cartesius

Pada bidang Cartesius tersebut, vektor **a** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0,0)$ ke titik $A(a_1,a_2)$. Oleh karena itu, vektor **a** ini dapat kalian tuliskan dalam bentuk pasangan terurut **a** = (a_1,a_2). Adapun vektor **b** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0,0)$ ke titik $B(b_1,b_2)$. Vektor **b** dapat kalian tuliskan sebagai **b** = (b_1,b_2). Dengan menggunakan rumus jarak, kalian dapat menentukan panjang vektor **a** dan **b** ini, yaitu:

Panjang vektor **a** adalah $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$

Panjang vektor **b** adalah $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}$

Dengan menarik ruas garis dari titik A ke titik B, kalian mendapatkan vektor **c**. Dengan menggunakan rumus jarak, vektor **c** ini dapat di tuliskan sebagai **c** = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) sehingga panjang vektor **c** adalah |**c**| = $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Jika arah vektor **c** dibalik, maka akan didapat vektor -**c**, yaitu sebuah vektor yang panjangnya sama dengan panjang vektor **c** dengan arah berlawanan. Vektor ini disebut vektor invers dari vektor **c**. Jika ditulis dalam bentuk pasangan terurut, vektor –**c** = (a_1 - b_1, a_2 - b_2). Panjangnya adalah

$$|-\mathbf{c}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Untuk setiap vektor **a** yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor **a**, dilambangkan dengan $\hat{e}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor **a** dan panjangnya sama dengan satu satuan.

Jika vektor **a** = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan:

$$\hat{e} = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu :

$$\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan pemahaman yang sama seperti vektor pada bidang (R^2), kalian dapat memahami vektor pada ruang (R^3). Misalnya, ambil sebarang titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dan $B(b_1, b_2, b_3)$ pada ruang (R^3), maka kalian dapat menuliskan vektor **a** yang mewakili vektor $\overrightarrow{OA}$ dan vektor **b** yang mewakili vektor $\overrightarrow{OB}$ dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut.

a = (a_1, a_2, a_3) dan **b** = (b_1, b_2, b_3)

Panjang kedua vektor ini masing-masing

|**a**| = $\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$ dan |**b**| = $\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}$

Untuk vektor pada ruang (R^3), juga dapat ditentukan vektor satuannya. Jika vektor a = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan :

$$\hat{e} = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ dan $\hat{k}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu :

$$\hat{\imath} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh :

Diketahui segitiga *ABC* dengan titik-titik sudut *A*(0, 3, 5), *B*(2, 4, 6), dan *C*(4, 3, 1). Tentukan:

a. Vektor **p** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *B*
b. Vektor **q** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *B* ke titik *C*
c. Vektor **r** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik C
d. Keliling segitiga *ABC*

Jawab :

a. Vektor **p** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *B*, maka **p** = $\overrightarrow{AB}$ = (2-0, 4-3, 6-5) = (2, 1, 1).

Panjang vektor **p** adalah :

$|\mathbf{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$

b. Vektor **q** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *B* ke titik *C*, maka **q** = $\overrightarrow{BC}$ = (4-2, 3-4, 1-6) = (2,-1,-5).

Panjang vektor **q** adalah :

$|\boldsymbol{q}| = \sqrt{2^2 + (-1^2) + (-5^2)} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

c. Vektor **r** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *C*, maka **r** = $\overrightarrow{AC}$ = (4 - 0, 3 - 3, 1 - 5) = (4, 0, -4).

Panjang vektor **r** adalah :

$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{4^2 + (0^2) + (-4^2)} = \sqrt{16+0+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

d. Keliling segitiga *ABC* adalah $|\mathbf{p}|+|\boldsymbol{q}|+|\boldsymbol{r}| = \sqrt{6} + \sqrt{30} + 4\sqrt{2}$

Latihan...

1. Gambarkan vektor-vektor berikut pada koordinat Cartesius!
   a. **p** = (4, 7)
   b. **q** = (-2, -2, 0)
   c. **r** = (0, 0, 0)
2. Diketahui segitiga *ABC* dengan titik-titik sudut *A*(3, 4, 2), *B*(6, -3, 5), dan *C*(2, 5, 6).
   a. Gambarlah segitiga tersebut.

b. Tentukanlah vektor **a** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *B* dan tentukan panjang vektor **a**.

c. Tentukanlah vektor **b** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *B* ke titik *C* dan tentukan panjang vektor **b**.

d. Tentukanlah vektor **c** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *C* dan tentukan panjang vektor **c**.

3. Diketahui vektor **u** = (1, -3, 2), **v** = (1, 1, 0), dan **w** = (2, 2, -4).

   Tentukanlah:

   a. $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$

   b. $|\boldsymbol{w}|$ - $|\boldsymbol{u}|$

   c. $|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|$ + $|\boldsymbol{w}|$ + $|\boldsymbol{u}|$

   d. $\frac{1}{|\boldsymbol{w}|}\mathbf{w}$

4. Diketahui vektor **u** dan **v** di *R*2.

   a. Jika $|\boldsymbol{u}|$ = 5, $|\boldsymbol{v}|$ = 2, dan $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$ = 19, tentukanlah $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$

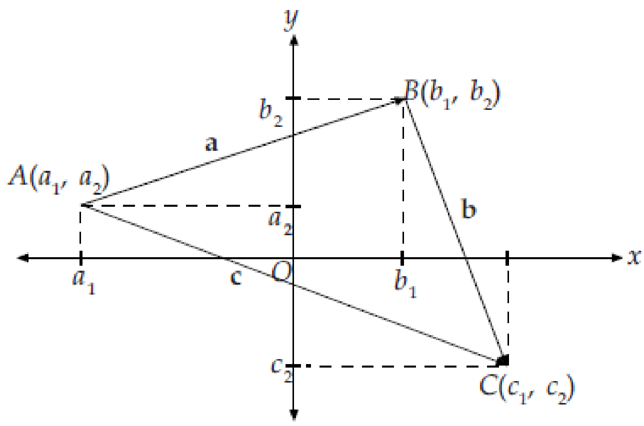
   b. Jika $|\boldsymbol{u}|$ = 3, $|\boldsymbol{v}|$ = 5, dan $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$ = 7, tentukanlah $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$

   c. Jika $|\boldsymbol{u}|$ = 4, $|\boldsymbol{v}|$ = 3, dan $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$ = $\sqrt{37}$, tentukanlah $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$

E. OPERASI VEKTOR

1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Perhatikan titik-titik $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$, dan $C(c_1,\ c_2)$ pada koordinat Cartesius berikut ini!



Gambar 2

Titik $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$ dan $C(c_1, c_2)$ pada koordinat Cartesius

Pada gambar tersebut, vektor **a**, **b**, dan **c** dapat kalian tulis sebagai berikut.

- **a =** $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

  Dapat pula ditulis, **a** = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{-a_1} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{-a_2} \end{pmatrix}$

- **b** = $(c_1 - b_1, c_2 - b_2)$.

  Dapat pula ditulis, **b** = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{-b_1} \\ \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{-b_2} \end{pmatrix}$

- **c** = $(c_1 - a_1, c_2 - a_2)$.

  Dapat pula ditulis, **c** = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{-a_1} \\ \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{-a_2} \end{pmatrix}$

Sekarang, jumlahkanlah vektor **a** dan **b**. Karena vektor merupakan matriks kolom, maka kalian dapat menjumlahkan vektor **a** dan **b** dengan menggunakan aturan penjumlahan matriks. Dengan aturan ini, akan diperoleh

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 \\ c_2 & -b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & + & c_1 - b_1 \\ b_2 - a_2 & + & c_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

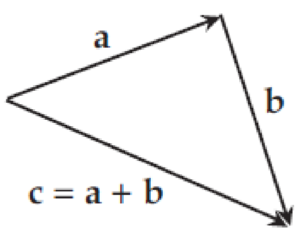
$$= \begin{pmatrix} c_1 & -a_1 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} c_1 & -a_1 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{c}$.

Uraian tersebut menunjukkan bahwa **a** + **b** = **c**. Secara geometris, penjumlahan antara vektor **a** dan **b** ini dapat kalian lakukan dengan dua cara, yaitu:

a. Cara Segitiga

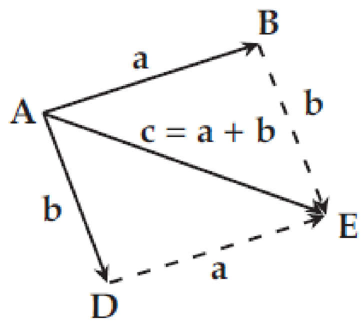
Dalam cara ini, titik pangkal vektor **b** berimpit ruas dengan titik ujung vektor **a**. Jumlah vektor **a** dan **b** didapat dengan menarik ruas garis dari titik pangkal vektor **a** ke titik ujung vektor **b**. Ruas garis ini diwakili oleh vektor **c**. Akibatnya, **a** + **b** = **c**.



Gambar 3

Penjumlahan vektor a + b = c dengan cara segitiga

b. Cara Jajargenjang



Gambar 4

Penjumlahan vektor a + b = c dengan cara jajargenjang

Misalkan, vektor **a** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *B* dan vektor **b** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *C* ke titik *D*. Dalam cara jajargenjang, titik pangkal vektor **a** berimpit dengan titik pangkal vektor **b**, yaitu *A* = *C*.

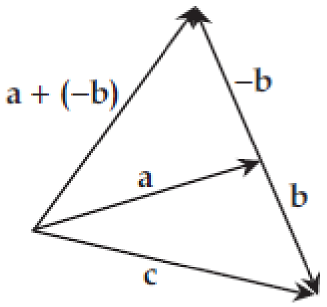
Dengan membuat jajargenjang *ABED*, akan diperoleh

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (Oleh karena $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$)

$= \overrightarrow{AE}$ (Gunakan cara segitiga)

Oleh karena $\overrightarrow{AB}$ = **a**, $\overrightarrow{AD}$ = **b**, dan $\overrightarrow{AE}$ = **c**, maka **a** + **b** = **c**.

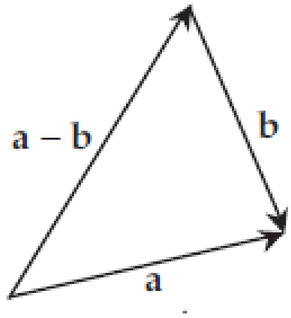
Sekarang, jika vektor **a** dijumlahkan dengan invers vektor **b,** maka kalian mendapatkan penjumlahan vektor **a** + **(-b)** sebagai berikut.



Gambar 5

Penjumlahan vektor a + (b)

Seperti pada bilangan real, kalian dapat menuliskan **a**+ **(-b)** = **a** - **b.** Secara geometris, kalian dapat mengurangkan **a** dengan **b** sebagai berikut.



Gambar 6

Pengurangan a – b secara geometris

Dengan menggunakan aturan penjumlahan dan pengurangan matriks kolom, kalian dapat menyatakan aturan penjumlahan dan pengurangan vektor sebagai berikut.

- Untuk **a** dan **b** vektor-vektor di R^2, berlaku

  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$

  Dengan menggunakan pasangan terurut, dapat dituliskan

  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

- Untuk **a** dan **b** vektor-vektor di R^3, berlaku

  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & + & b_2 \\ a_3 & & b_3 \end{pmatrix}$

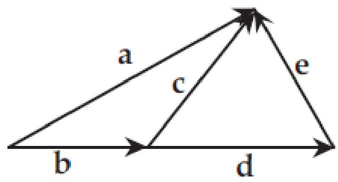
  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & - & b_2 \\ a_3 & & b_3 \end{pmatrix}$

Dengan menggunakan pasangan terurut, dapat dituliskan

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 7

Penjumlahan vektor

Dari gambar di atas, kalian dapat menyatakan:

- **b** + **c** = **a**
- **d** + **e** = **c**
- **b** + **d** + **e** = **a**

Contoh :

Diketahui vektor-vektor **a** = (0, -2, -1), **b** = (2, 3, 4), dan **c** = (-3, 0, 3), tentukan:

1. **a + b**
2. **c – b**
3. **a – a**
4. **a + 0**
5. **a + (b + c)**

Jawab:

1. **a** + **b** = (0, -2, -1) + (2, 3, 4) = (0 + 2, -2 + 3, -1 + 4) = (2, 1, 3)

   Jadi, **a** + **b** = (2, 1, 3).
2. **c** - **b** = (-3, 0, 3) - (2, 3, 4) = (-3 - 2, 0 - 3, 3 - 4) = (-5, -3, -1)

   Jadi, **c** - **b** = (-5, -3, -1).
3. **a** - **a** = (0, -2,- 1) - (0, -2, -1) = ((0 - 0, -2 - (-2), -1 - (-1)) = (0, 0, 0) = **0**

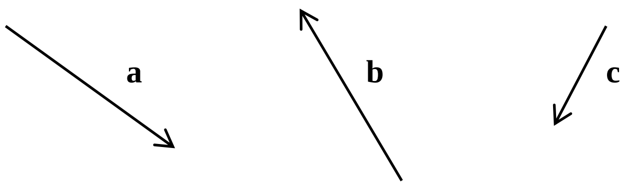
   Jadi, **a** - **a** = **0**.
4. **a** + **0** = (0, -2, -1) + (0, 0, 0) = (0 + 0, -2 + 0, -1 + 0) = (0, -2, -1) = **a**

   Jadi, **a** + **0** = **a**.
5. **a** + (**b** + **c**) = (0, -2, -1) + (-1, 3, 7) = (0 + (-1), -2 + 3, -1 + 7) = (-1, 1, 6)

   Jadi, **a** _ (**b** _ **c**) _ (_1, 1, 6).

Latihan…

1. Diketahui vektor-vektor berikut.



Jika $|\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{c}|$, dan $|\boldsymbol{b}| = 2\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|$, gambarkan vektor-vektor berikut!

a. **a** + **b**

b. **c** + **b**

c. (**a** + **b**) + **c**

d. (**b** - **a**)

e. (**a** - **b**) + (**a** - **c**)

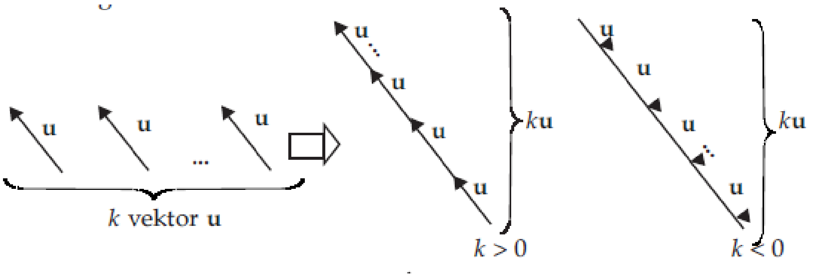
2. Diketahui vektor-vektor **a** = (-5, -4, -3); **b** = (1, 2, 3); dan **c** = (-3, 8, 5); tentukanlah:
   a. $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$
   b. $(|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|) + |\boldsymbol{c}|$
   c. **a** + (**c** + **a**)
   d. **b** - **a**
   e. (**a** - **b**) + (**a** - **c**)
3. Secara geometri, buktikan bahwa:
   a. **u** + **v** = **v** + **u**
   b. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
   c. **u** + **o** = **o** + **u** = **u**
   d. **u** + (-**u**) = -**u** + **u** = **o**

2. Perkalian Skalar dengan Vektor

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mempelajari penjumlahan vektor. Apa yang terjadi jika vektor-vektor yang dijumlahkan adalah *k* vektor yang sama? Dalam penjumlahan tersebut, kalian akan mendapatkan sebuah vektor baru yang setiap komponen-komponennya diperoleh dengan mengalikan *k* dengan setiap komponen-komponen vektor **u**. Akibatnya, vektor baru tersebut segaris dengan vektor **u** dan memiliki panjang $k|u|$.

Jika *k* skalar tak nol dan vektor u = (u_1, *u*2, …, u_n), maka *k*u = (ku_1, ku_2, …, ku_n).

Dalam perkalian skalar dengan vektor ini, jika *k* 0 > 0, maka vektor k**u** searah dengan vektor **u**. Adapun jika *k* < 0, maka vektor k**u** berlawanan arah dengan vektor **u**.



Gambar 8

Perkalian skalar dengan vektor u

Contoh :

1. Diketahui vektor **a** = (1, 4, 5) dan **b** = (2, 3, 2), tentukan vektor **c** = 2**a** + 3**b**.

   Jawab:

   c = 2**a** + 3**b** = 2(1, 4, 5) + 3(2, 3, 2)

   = (2 x 1, 2 x 4, 2 x 5) + (3 x 2, 3 x 3, 3 x 2)

   = (2, 8, 10) + (6, 9, 6)

   = (8, 17, 16)

   Jadi, **c** = 2**a** + 3**b** = (8, 17, 16).

2. Buktikan bahwa vektor **u** = (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor **v** = (1, 0, -2).

   Bukti:

   Untuk membuktikan bahwa vektor **u** = (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor **v** = (1, 0, -2), kalian harus menunjukkan ada bilangan real *k* sehingga **u** = *k***v**.

   $\mathbf{u} = k\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{0}$

   (-3, 0, 6) - *k*(1, 0, -2) = (0, 0, 0)

   (-3, 0, 6) - (*k*, 0, -2*k*) = (0, 0, 0)

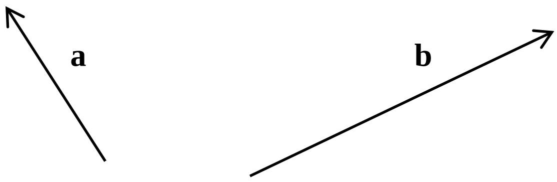
   (-3 - *k*, 0, 6 + 2*k*) = (0, 0, 0)

   Didapat, *k* = -3, maka, **u** = -3**v**.

   Jadi, vektor **u** = (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor **v** = (1, 0, -2).

Latihan...

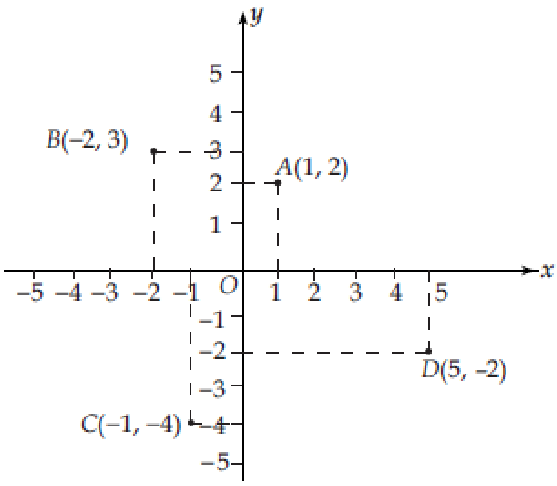
1. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, -2, -1)$, dan $\mathbf{c} = (-1, -2, 3)$. Hitunglah:
   a. $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$
   b. $-\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$
   c. $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$
2. Diketahui vektor **a** dan **b** seperti gambar berikut.



   Gambarkan vektor **c** jika:
   a. $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
   b. $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
   c. $\mathbf{c} = -3\mathbf{a} + \mathbf{b}$
3. Carilah vektor dengan titik pangkal $P(2, -1, 4)$ yang mempunyai arah sama seperti vektor $\mathbf{v} = (7, 6, -3)$!
4. Carilah vektor dengan titik ujung $Q(2, 0, -7)$ yang arahnya berlawanan dengan vektor $\mathbf{v} = (-2, 4, -1)$!

3. Sifat-Sifat Operasi Hitung pada Vektor

Vektor di $R2$ berhubungan dengan letak suatu titik pada sebuah bidang dengan pasangan bilangan (x, y) merupakan koordinat Cartesius dari suatu titik atau koordinat bidang.

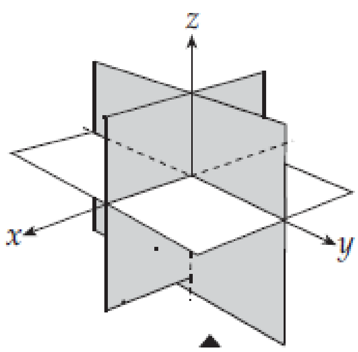


Gambar 9

Koordinat Cartesius di R^2

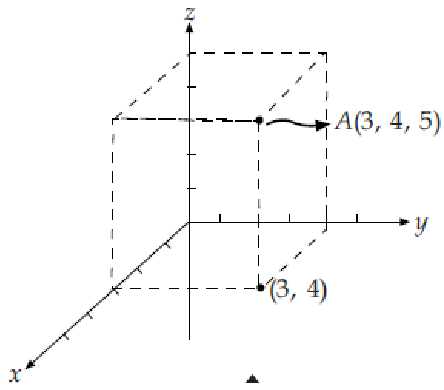
Vektor R^2 mempunyai pasangan bilangan (x, y, z) yang merupakan koordinat Cartesius dari suatu titik atau koordinat ruang ke tiga sumbu membentuk tiga bidang, yaitu bidang xy, bidang xz, dan bidang yz.

Ketiga bidang tersebut membagi ruang dimensi tiga menjadi 8 daerah seperti Gambar 9 berikut.



Gambar 10

Daerah perpotongan pada ruang dimensi tiga



Gambar 11

Koordinat Cartesius di R^3

Sifat-sifat yang terdapat dalam operasi hitung vektor adalah sebagai berikut.

Jika **a**, **b**, dan **c** vektor-vektor di *R*2 atau di *R*3 dan *k* serta *l* skalar tak nol maka berlaku hubungan berikut.

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$
5. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$
6. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$
7. $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Dalam modul ini akan dibuktikan sifat 1, sifat 2, sifat 4, dan sifat 7. Untuk sifat-sifat yang lain, dapat kalian buktikan sendiri.

Pembuktian sifat 1

Ambil sebarang vektor **a** = (a_1, a_2, a_3) dan **b** = (b_1, b_2, b_3), maka

a + **b** $= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3),$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$= (b1 + a1, b2 + a2, b3 + a3)$

$= (b1, b2, b3) + (a1, a2, a3)$

= **b** + **a**

Jadi, **a** + **b** = **b** + **a**.

Pembuktian sifat 2

Ambil sebarang vektor **a** = (a_1, a_2, a_3), **b** = (b_1, b_2, b_3), dan **c** = (c_1, c_2, c_3), maka:

(**a** + **b**) + **c** $= ((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) + (c_1, c_2, c_3)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) + (c_1, c_2, c_3)$

$= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3)$

$= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3))$

$= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$

$= (a_1, a_2, a_3) + ((b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3))$

= **a** + (**b** + **c**)

Jadi, (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**).

Pembuktian sifat 4

Ambil sebarang vektor **a** = (a_1, a_2, a_3), maka :

a + (-**a**) $= (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3)$

$= (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3)$

$= (0, 0, 0) = \mathbf{o}$

Jadi, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

Pembuktian sifat 7

Ambil sebarang skalar k dan l serta vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka :

$(k + l)\mathbf{a} = (k + l)\,(a_1, a_2, a_3)$,

$= ((k + l)a_1, (k + l)a_2, (k + l)a_3)$

$= (ka_1 + la_1, ka_2 + la_2, ka_3 + la_3)$

$= (ka_1, ka_2, ka_3) + (la_1, la_2, la_3)$

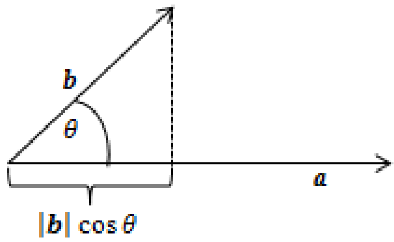
$= k(a_1, a_2, a_3) + l(a_1, a_2, a_3)$

$= k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$

Jadi, $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$.

4. Perkalian Skalar Dua Vektor

Perkalian skalar antara dua vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ didefinisikan suatu skalar yang sama dengan $|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta$, dengan θ adalah sudut antara vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$.



Gambar 12

θ berada diantara vektor a dan b

Perkalian skalar antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ dituliskan dengan notasi $\boldsymbol{a}\ .\ \boldsymbol{b}$. Penggunaan notasi titik untuk menyatakan perkalian skalar menyebabkan perkalian skalar sering juga disebut sebagai perkalian titik. Jadi, dari definisi tersebut diperoleh pengertian perkalian skalar sebagai berikut.

$$\boldsymbol{a}\ .\ \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

CATATAN!

Sifat-sifat hasil kali skalar :

1. Dua vektor yang saling sejajar : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos 0° = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$
2. Dua vektor yang saling tegak lurus : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos 90° = 0$
3. Dua vektor yang berlawanan arah : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos 018° = -|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$
4. Bersifat komutatif : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
5. Bersifat distributif : $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$
6. $k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$, k adalah konstanta
7. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

Perkalian skalar dua vektor dalam bentuk komponen :

Jika $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Latihan...

1. Buktikan secara geometri bahwa:
   a. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$
   b. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$
   c. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$
2. Tentukanlah vektor **u** dan **v**, jika
   $\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (7, 2, -2)$ dan $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} = (12, 0, -1)$.
3. Diketahui titik $A(7, 3, 6)$, $B(1, 0, 0)$, dan $C(3, 2, 1)$. Tentukan panjang $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{BC}$. Kemudian, buktikanlah bahwa C terletak pada garis AB.
4. Diketahui titik $A(-6, -2, -4)$, $B(3, 1, 2)$, dan $C(6, 2, 4)$. Tunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris (kolinier).

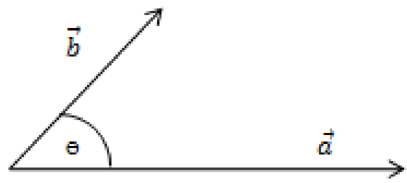
F. SUDUT ANTAR VEKTOR

Jika dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bertemu pada satu titik, maka sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut yang dibentuk oleh kaki vektor $\vec{a}$ dan kaki vektor $\vec{b}$. Sudut yang diambil adalah sudut terkecil.

Dari rumus:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \theta$



Gambar 13

Sudut antara dua vektor

Diperoleh :

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Contoh:

Carilah besar sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, bila $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ dan $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Jawab:

Langkah penyelesaian untuk contoh di atas adalah

1. Contoh di atas memberikan informasi adanya dua vektor berarah $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ yang memiliki satuan-satuan $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ dan $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
2. Kedua vektor di atas akan diolah untuk memperoleh besar sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$
3. Untuk memperoleh besar sudut $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, maka digunakan rumus perkalian skalar antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, sehingga

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \theta$

   $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$
4. Dari langkah (1) kita memperoleh vektor satuan-vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, yaitu

   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
5. Dari langkah (4) didapatkan :

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 + 1 - 2 = -3$

   $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{(1+1+4)(4+1+1)}} = \frac{-3}{\sqrt{36}} = -\frac{1}{2}$

   $\theta = \arc \cos (\frac{1}{2})$

   $= 120^o$

G. RANGKUMAN

1. Penulisan vektor
   - Dengan huruf kecil dicetak tebal.

     Misalkan: **a**, **b**, **c**, ...
   - Dengan huruf kecil yang di atas huruf tersebut dibubuhi tanda panah.

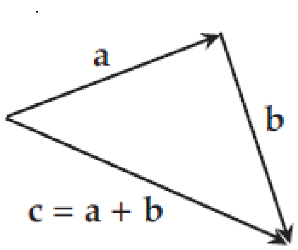
     Misalkan: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...
2. Panjang vektor **a** dirumuskan sebagai berikut:
   - Jika **a** $\in R^2$, **a** = (a_1, a_2), maka $|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$
   - Jika **a** $\in R^3$, **a** = (a_1, a_2, a_3), maka $|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$
3. Jika vektor **a** = (a_1, a_2) dan vektor **b** = (b_1, b_2), maka vektor yang menghubungkan vektor **a** dan **b** adalah vektor **c** = $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Panjang vektor **c** adalah

   $$|c| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$
4. Untuk setiap vektor **a** yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor **a**, dilambangkan dengan $\hat{e}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor **a** dan panjangnya sama dengan satu satuan.

   Jika vektor **a** = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan:

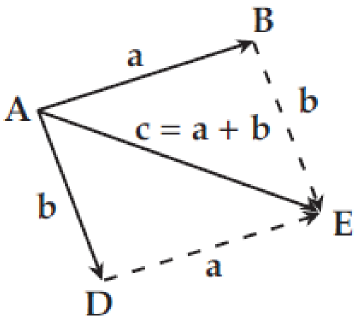
   $$\hat{e} = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
5. Jika *a*, *b*, *c*, *k*, *l* adalah vektor maka sifat-sifat operasi hitung pada vektor adalah sebagai berikut
   - **a** + **b** = **b** + **a**
   - (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)
   - **a** + **o** = **o** + **a** = **a**
   - **a** + (-**a**) = **o**
   - *k*(*l***a**) = (*kl*)**a**
   - *k*(**a** + **b**) = *k***a** + *k***b**
   - (*k* + *l*)**a** = *k***a** + *l***a**
   - 1**a** = **a**

6. Penjumlahan antara vektor **a** dan **b** dapat dilakukan dengan dua cara berikut ini.
   - Cara segitiga



Titik pangkal vektor **b** berimpit dengan titik ujung vektor **a**.

   - Cara jajargenjang



Titik pangkal vektor **a** berimpit dengan titik pangkal vektor **b** dan **c.**

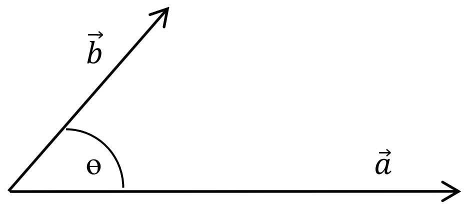
7. Sifat-sifat hasil kali skalar :
   - Dua vektor yang saling sejajar : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos 0° = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$
   - Dua vektor yang saling tegak lurus : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos 90° = 0$
   - Dua vektor yang berlawanan arah : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos 018° = -|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$
   - Bersifat komutatif : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
   - Bersifat distributif : $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$
   - $k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$, k adalah konstanta
   - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
8. Perkalian skalar dua vektor dalam bentuk komponen :

   Jika $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

   maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

9. Sudut antara dua vektor

$\cos \theta = \dfrac{\vec{a}\,.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$



Sehingga

$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos \theta$

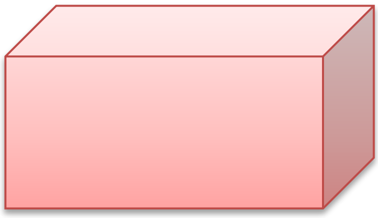
H. TUGAS

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu !

1. Diketahui segitiga *ABC* dengan titik-titik sudut *A*(3, 4, 2), *B*(6, -3, 5), dan *C*(2, 5, 6).
   a. Tentukanlah keliling segitiga *ABC*.
   b. Tentukanlah luas segitiga *ABC*.
2. Hitunglah panjang vektor dari $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$!
3. Jika $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ maka tentukan $|\vec{a}\,|$!
4. Jika $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$ maka tentukan :
   a. $\vec{a} + \vec{b}$
   b. $\vec{b} - \vec{a}$
5. Jika $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ maka tentukan $10\vec{a}$!
6. Carilah nilai a, b dan c jika : $a\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$!
7. Buktikanlah bahwa vektor **u** = (2, -1, 3) sejajar dengan vektor **v** = (-4, 2, -6)!
8. Diketahui titik *A*(2, 4, 6), *B*(6, 6, 2), dan *C*(14, 10, -6). Tunjukkan bahwa titik *A*, *B*, dan *C* segaris (kolinier)!
9. Tentukanlah semua skalar c_1, c_2, dan c_3 yang memenuhi $c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = 0$.
10. Hitunglah besar sudut *AOB* jika :
    a. *A*(4, 2, -1) dan *B*(2, -2, 4)
    b. *A*(1, 0, 1) dan *B*(0, 1, -1)

I. TES

1. Perhatikan gambar balok dibawah ini!



   Tentukan vektor lain yang sesuai dengan vektor $\overrightarrow{AB}$!

2. Diketahui vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, tentukan $|\vec{u}|$!

3. Jika diketahui vektor $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ dan $|\vec{b}| = 3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, maka hitunglah :
   a. $|\vec{a}|$
   b. $|\vec{b}|$
   c. $|\vec{a} - \vec{b}|$

4. Diketahui $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tentukan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$!

5. Tentukan kosinus sudut antara vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$!

J. LEMBAR KERJA PRAKTEK

A. Tujuan Percobaan : Menggambar vektor

Mengamati

1. Amatilah peragaan yang dilakukan oleh 3 orang temanmu yang berjalan dari tempat duduknya masing-masing (titik acuan yang berbeda) menuju ke depan kelas, kemudian mereka melangkah lagi dari titik acuan yang sama ke tujuan dengan arah yang berbeda.

Menanya

1. Merumuskan masalah

   ....

   ....
2. Hipotesis

   ....

   ....

Mencoba

B. Alat dan bahan :
1. Penggaris
2. Kertas berpetak
3. Pensil warna

C. Proedur kerja :
1. Buatlah denah sekolah Anda pada kertas berpetak
2. Dengan menggunakan pensil warna, gambarkan arah panah pada lintasan yang anda lalui dari gerbang utama sekolah menuju ke kelas Anda.
3. Dengan cara yang sama seperti pada langkah 2, gambarlah lintasan yang Anda tempuh dari kelas menuju perpustakaan sekolah
4. Kemudian tentukan arah vektor tersebut

D. Hasil pengamatan

....

....

....

....

Mengasosiasi

E. Analisis data

Bagaimana cara menentukan arah vektor yang kalian gambarkan?

....

....

....

....

F. Kesimpulan

....

....

....

....

BAB III EVALUASI

A. TES KOGNITIF

a. Pilihan Ganda

1. Diketahui vektor-vektor **a** = (0, -2, -1), **b** = (2, 3, 4), dan **c** = (-3, 0, 3), Maka hasil dari **b + a** adalah . . . .
   A. (2, 1, 3)
   B. (-1, 3, 7)
   C. (5, 3, 1)
   D. (-5, -3, -1)
   E. (0, -4, -2)
2. Diketahui titik *P* (1, 7) dan *Q*(4, 1). Titik *R* adalah sebuah titik pada garis hubung *PQ* sehingga $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$. Koordinat titik *C* adalah . . . .
   A. (5, 2)
   B. (3, -6)
   C. (2, 5)
   D. (1, -2)
   E. (4, 2)
3. Diketahui $C = 16i - 15j + 12k$ dan d vektor yang segaris (kolinear) berlawanan arah dengan c. Jika |**d**| = 75, maka d = ...
   A. $-16i + 15j - 12k$
   B. $32i - 30j + 24k$
   C. $-32i + 30j - 24k$
   D. $-48i + 45j - 36k$
   E. $-56i + 36j - 24k$
4. Diberikan segi enam beraturan *ABCDEF*. Jika $\overrightarrow{AB} = u$ dan $\overrightarrow{AF} = v$, maka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ = ...
   A. $2u + 2v$
   B. $4u + 4v$

C. $5u + 5v$

D. $6u + 6v$

E. $8u + 8v$

5. Jika $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 2)$ dan $\emptyset = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ maka tan $\emptyset$ = ...

   A. $\frac{3}{5}$

   B. $\frac{3}{4}$

   C. $\frac{4}{3}$

   D. $\frac{9}{16}$

   E. $\frac{6}{13}$

6. Jika **a** = (2, k), **b** = (3, 5), dan sudut (**a**, **b**) adalah $\frac{\pi}{4}$, maka konstanta positif k adalah . . . .

   A. $\frac{1}{4}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. 2

   D. 4

   E. 8

7. Jika sudut antara vektor $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \sqrt{2}\,\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ adalah 60°, maka p = ...

   A. $-\frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2}$

   B. -1 atau 1

   C. $-\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2}$

   D. $-\sqrt{5}$ atau $\sqrt{5}$

   E. $-\sqrt{7}$ atau $\sqrt{7}$

8. Diketahui persegi panjang $OABC$ dan D titik tengah OA, CD memotong diagonal AB di P. Jika $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ dan $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, maka $\overrightarrow{OP}$ dapat dinyatakan sebagai . . . .

   A. $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

B. $\frac{1}{3}$ **(a+b)**

C. $\frac{2}{3}$ **a** + $\frac{1}{3}$ **b**

D. $\frac{1}{3}$ **a** + $\frac{2}{3}$ **b**

E. $\frac{1}{2}$ **a** + $\frac{3}{4}$ **b**

9. *ABCDEF* adalah segi enam beraturan dengan pusat *O*, jika $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ masingmasing dinyatakan oleh vektor **u** dan **v**, maka sama dengan . . . .
   A. **u** + **v**
   B. **u** - 2**v**
   C. **v** - **u**
   D. 2**v** - **u**
   E. 3**v** – **u**

10. Jika $|\boldsymbol{a}|$ = 1, $|\boldsymbol{b}|$ = 4, dan ***a* . *b*** = 3, mak $|2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ = ...
   A. $2\sqrt{2}$
   B. $3\sqrt{2}$
   C. $2\sqrt{3}$
   D. $3\sqrt{3}$
   E. 4

b. Essay

1. Misalkan **a** = (1, 2, 3), **b** = (2, -3, 1) dan **c** = (3, 2, -1). Hitunglah:
   a. **a** - **c**
   b. 7**b** + 3**c**
   c. 3(**a** - 7**b**)
   d. 2**b** -(**a** + **c**)
2. Gambarlah vektor-vektor berikut!
   a. **p** = (-3, 7)
   b. **q** = (0, -4)
   c. **r** = (2, 3, 4)

d. $\mathbf{s}$ = (0, 0, -2)

3. Misalkan $\mathbf{p}$ = (1, -3, 2), $\mathbf{q}$ = (1,1, 0) dan $\mathbf{r}$ = (2, 2, -4). Hitunglah:

   a. $|p+q|$

   b. $|p|$ + $|q|$

   c. $|-2p|$ + 2$|p|$

   d. $|3p-5q+r|$

4. Buktikanlah bahwa:

   ($\mathbf{u}$ + $k\mathbf{v}$) x $\mathbf{v}$ = $\mathbf{u}$ x $\mathbf{v}$

5. Buktikanlah!

   a. $\mathbf{a}$ + 0 = 0 + $\mathbf{a}$ = $\mathbf{a}$

   b. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$

   c. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$

   d. 1$\mathbf{a}$ = $\mathbf{a}$

B. TES PSIKOMOTORIK

1. Simak beberapa pernyataan berikut ini.
   a. Panjang meja belajar Rahmad adalah 120 cm.
   b. Selang waktu Agung berlari menempuh jarak 100m adalah 13,1 detik.
   c. Luas tanah rumah tipe 50 adalah 126 m^2.
   d. Sebuah kapal berlayar 10 mil dari M ke N pada arah 60°.
   e. Sebuah bus bergerak dengan kecepatan 80 km/jam ke Barat.
   f. Indah mendorong meja belajarnya dengan gaya 10 Newton ke kanan.
2. Renungkan masalah berikut. Kemudian, jawablah pertanyaannya.
   a. Panjang meja belajar Rahmad dalam **pernyataan 1a** jika diukur dengan pita ukur dari kiri ke kanan dan dari kanan ke kiri, apakah hasilnya berbeda?
   b. Dalam **pernyataan 1a, 1b** dan **1c,** apakah 120cm, 13,1 detik dan 126m^2 cukup untuk menyatakan masing-masing panjang meja, selang waktu dan luas tanah?
   c. Dalam **pernyataan 1d,** apakah kapal yang berlayar 10 mil pada arah 60° dan kapal yang berlayar 10 mil pada arah 120° akan tiba pada tempat yang sama?
   d. Dalam **pernyataan 1f**, apakah sama hasilnya ketika Indah mendorong meja belajarnya 10 Newton ke kanan dan 10 Newton ke kiri?

Analisis :

Apakah perbedaan antara tiga besaran yang disebutkan pertama dalam **pernyataan 1** dan tiga besaran berikutnya? Jelaskan dan sajikan hasilnya di depan kelas.

DAFTAR PUSTAKA

Pesta, E. Dkk. 2008. *Matematika Aplikasi Untuk SMA dan MA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Sunardi, H. Dkk. 2005. *Matematika Untuk SMA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam*. Jakarta: Bumi Akasara.

Wirodikromo, S. 2006. *Matematika Untuk SMA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam*. Penerbit: Erlangga.

http://matematikadisma.blogspot.com/2011/07/materi-ajar-matematika-xii-ipa bab_13.html

https://books.google.co.id/books?id=NFkVfrZBqpUC&pg=PA165&lpg=PA165&dq=enggunakan+sifatsifat+dan+operasi+aljabar+vektor+dalam+pemecahan+masalh.&source=bl&ots=keOAJPfgCV&sig=ayhOzldErsyLNURMXudIApNyWZ&hl=id&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

http://www.ivans.id/2012/09/vektor.html

http://belajarmatematikaasyik.weebly.com/vektor.html

http://www.slideshare.net/ebentscrue/lks-vektor